

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

66. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. OKTOBER 1956)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG
1956

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole σ und $\mathcal{O}$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

66. Band

Inhalt

1. Heft

Seite

Hadwiger, H., und D. Ohmann, Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie	1
Chen, Yung-Ming, On the integrability of functions defined by trigonometrical series	9
Hodges, J. H., Weighted partitions for symmetric matrices in a finite field	13
Mahler, K., Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen	25
Faulhaber, G., Äquivalenzsätze für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie . .	34
Taylor, A. E., Extensions of a Theorem of Hellinger and Toeplitz	53
Landsberg, M., Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokal-konvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω)	58
Karrass, A., and D. Solitar, Some Remarks on the Infinite Symmetric Groups .	64
Ostrowski, A., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung .	70
Kneser, M., Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen	88
Schröder, J., Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff	111
Paasche, I., Bemerkung zu einem Desideratum von PERRON	117

Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie

Von

H. HADWIGER und D. OHMANN

Das Ziel der vorliegenden Note ist es, für die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung und für die damit im engsten Zusammenhang stehende isoperimetrische Ungleichung unter Einschluß der Festlegung geeigneter Gleichheitsbedingungen einen kurzen, mit einfachen Hilfsmitteln der direkten Mengenometrie auskommenden Beweis zu geben¹⁾. Die Betrachtungen erstrecken sich auf beschränkte, abgeschlossene und nichtleere Punktmengen des k -dimensionalen euklidischen Raumes.

1. Wir formulieren zunächst die Ergebnisse. Es bezeichne $C = A \times B$ die MINKOWSKISCHE Summe der Mengen A und B , d.h. die Menge der Punkte $c = a + b$ [$a \in A, b \in B$]²⁾. Mit A und B ist auch C abgeschlossen. Weiter bedeute $V(A)$ das LEBESGUESCHE Maß von A . Es gilt dann der folgende

Satz I (BRUNN-MINKOWSKISCHER SATZ). *Es besteht die Ungleichung*

$$(1) \quad V(A \times B)^{1/k} \geq V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k},$$

wobei für Mengen positiven Maßes Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn A und B homothetische konvexe Körper sind.

Wir betrachten weiter die durch den Ansatz

$$F(A; B) = \liminf [V(A \times \tau B) - V(A)]/\tau \quad [\tau \rightarrow 0]$$

definierte (untere) MINKOWSKISCHE Relativoberfläche von A bezüglich B . Hierbei bezeichnet τB die durch Dilatation mit $\tau > 0$ aus B hervorgehende Menge, d.h. die Menge der Punkte τb [$b \in B$]. Eine einfach formulierbare und befriedigende Abklärung der Frage, unter welchen Bedingungen in der isoperimetrischen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, läßt sich mit Hilfe des von E. SCHMIDT³⁾ herangezogenen Begriffs der schleierlosen Menge erzielen. Ein Punkt a einer meßbaren Menge A heißt volumfremd, wenn eine Kugel K von positivem Radius um a als Mittelpunkt so existiert, daß $V(A \cap K) = 0$ ist. Die Menge der volumfremden Punkte einer Menge ist ihr

¹⁾ Die mengengeometrische Arbeitsmethode knüpft unmittelbar an die Grundtatsachen der Elementargeometrie, der Punktmengenlehre und der niederen Analysis der reellen Zahlen an und meidet insbesondere die Hilfsmittel der Differential- und Integralanalysis.

²⁾ Für Punkte und ihre Ortsvektoren sind die gleichen Symbole verwendet.

³⁾ SCHMIDT, E.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. I, II. Math. Nachr. 1, 81—157 (1948); 2, 171—244 (1949), insb. II 223, 232.

Schleier; ist diese Menge leer, so wollen wir A schleierlos nennen. Die Menge der nicht-volumfremden, also der volumverbundenen Punkte ist der Volumkern A^0 von A . Es gilt nun der folgende

Satz II (Isoperimetrischer Satz). *Es besteht die Ungleichung*

$$(2) \quad F(A; B) \geq k V(A)^{(k-1)/k} V(B)^{1/k},$$

wobei für schleierlose Mengen positiven Maßes Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn A und B homothetische konvexe Körper sind.

Die Ungleichungen (1) und (2) sind schon oft in dieser Allgemeinheit bewiesen worden⁴⁾. Die Bedingungen für Gleichheit sind bei (1) bekannt⁵⁾; dagegen sind solche bei (2) nur im Sonderfall, daß B eine Kugel ist, nachgewiesen worden⁶⁾.

2. Nachfolgend erklären wir eine für die Beweisführung benötigte Hilfsoperation, nämlich die volumtreue Parallelzerlegung zweier Mengen. Es sollen E_a und E_b zwei orientierte und parallele, $(k-1)$ -dimensionale Ebenen, H'_a bzw. H'_b und H''_a bzw. H''_b die beiden durch sie erzeugten positiven und negativen abgeschlossenen Halbräume bezeichnen. Die Ebenen E_a und E_b erzeugen eine Zerlegung der Mengen A und B [$V(A), V(B) > 0$] in die abgeschlossenen Teile $A' = A \cap H'_a$, $A'' = A \cap H''_a$, $B' = B \cap H'_b$, $B'' = B \cap H''_b$. Dabei setzen wir voraus, daß die Bedingung

$$(3) \quad V(A')/V(A) = V(B')/V(B)$$

erfüllt sei. Offenbar ist

$$(4) \quad V(A) = V(A') + V(A''); \quad V(B) = V(B') + V(B'').$$

Da einerseits $A \times B \supset (A' \times B') \cup (A'' \times B'')$ gilt, andererseits aber der Durchschnitt $(A' \times B') \cap (A'' \times B'')$ ganz in der Ebene $E_a \times E_b$ enthalten sein muß und daher eine Nullmenge ist, besteht weiter die Beziehung

$$(5) \quad V(A \times B) \geq V(A' \times B') + V(A'' \times B'').$$

⁴⁾ BUSEMANN, H.: The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). — HADWIGER, H.: Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. Math. Z. **53**, 210—218 (1950). — HENSTOCK, R., u. A. M. MACBEATH: On the measure of sum-sets. (I) The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. London Math. Soc. **3**, 182—194 (1953).

⁵⁾ LUSTERNIK, L.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. **3** (8), No. 2 (62) 55—58 (1935). Es handelt sich hier wohl um die erste Abhandlung, welche sich mit dem Problem in dieser Allgemeinheit befaßt; jedoch sind die Beweise fehlerhaft. Vgl. hierzu R. HENSTOCK-A. M. MACBEATH, loc. cit.⁴⁾.

⁶⁾ DINGHAS, A., u. E. SCHMIDT: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n -dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. Nr. 7 (1943). — SCHMIDT, E.: loc. cit. — DINGHAS, A.: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr. **2**, 107—113 (1949).

Ersetzt man hier B durch τB und subtrahiert $V(A)$ mit Verwendung von (4), so ergibt sich durch Grenzbetrachtung $\tau \rightarrow 0$

$$(6) \quad F(A; B) \geq F(A'; B') + F(A''; B'').$$

Man beachte hier, daß $(\tau B)' = \tau B'$ und $(\tau B)'' = \tau B''$ ist, falls das Dilatationszentrum in der Ebene E_b angenommen wird. Die Bedingung (3) bleibt dann auch erhalten.

3. Wir führen jetzt die beiden BRUNN-MINKOWSKISCHEN Defizite

$$(7) \quad \phi(A; B) = V(A \times B) - [V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k}]^k$$

und

$$(8) \quad q(A; B) = F(A; B) - k V(A)^{(k-1)/k} V(B)^{1/k}$$

ein. Ausgehend von (5) und (6) bestätigt man durch direkte Ausrechnung, daß bezüglich einer volumtreuen Parallelzerlegung von A und B die Funktionalungleichungen

$$(9) \quad \phi(A; B) \geq \phi(A'; B') + \phi(A''; B'')$$

und

$$(10) \quad q(A; B) \geq q(A'; B') + q(A''; B'')$$

gelten; hierbei sind die Bedingungen (3) der Volumtreue wesentlich.

4. Nun weisen wir die Gültigkeit der Ungleichungen (1) und (2) nach, d.h. wir zeigen, daß die oben eingeführten Defizite nichtnegativ sind, so daß also

$$(11a) \quad \phi(A; B) \geq 0; \quad (11b) \quad q(A; B) \geq 0$$

gilt. In der Tat: Zunächst ist (11a) richtig für den Fall, daß A und B zwei parallel liegende gerade Parallelotope sind. Bezeichnen a_i und b_i ($i=1, \dots, k$) die Kantenlängen von A und B , so sind diejenigen von $C=A \times B$ durch $c_i = a_i + b_i$ gegeben. Das Defizit ϕ läßt sich durch passende Umformung in die Gestalt

$$\phi = V(C) \{1 - [(\alpha_1 \dots \alpha_k)^{1/k} + (\beta_1 \dots \beta_k)^{1/k}]^k\}$$

bringen, wobei die Hilfszahlen α_i und β_i durch

$$\alpha_i = a_i/(a_i + b_i), \quad \beta_i = b_i/(a_i + b_i) \quad [\alpha_i + \beta_i = 1]$$

gegeben sind. Die erzielte Form gestattet, die Definitheit $\phi \geq 0$ auf Grund des klassischen Satzes über das geometrische und das arithmetische Mittel von k positiven Zahlen direkt abzulesen. Wir bemerken noch, daß (11a) damit auch für Mengen A, B gilt, die sich von den eben beschriebenen Parallelotopen nur um Nullmengen unterscheiden.

Es seien nun A und B zwei parallel orientierte Intervallpolyeder, die sich also im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele, parallel liegende, gerade Parallelotope zerlegen lassen. Ist $n(A)$ bzw. $n(B)$ die Anzahl der Parallelotope positiven Volumens, die bei einer individuellen Zerlegung von

A bzw. von B erhalten wird, so ist (11a) richtig, wenn $n = n(A) + n(B) = 2$ ist. Es sei $m > 2$. Wir treffen die Induktionsvoraussetzung, daß (11a) richtig ist für alle Polyederpaare mit $n < m$, und es liege nun ein Fall mit $n = m$ vor. Auf Grund elementarer Erwägungen sieht man ein, daß A und B durch eine volumtreue Zerlegung in Intervallpolyeder A', A'', B', B'' so zerlegt werden können, daß $n' = n(A') + n(B') < m$ und $n'' = n(A'') + n(B'') < m$ ausfällt. Ein Blick auf (9) zeigt, daß vermöge der Induktionsvoraussetzung wieder auf $\phi \geq 0$ geschlossen werden kann. (11a) ist also für alle Intervallpolyeder richtig.

Bedeutet A_ν, B_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) zwei monoton fallende Folgen abgeschlossener Mengen, so daß also $A_\nu > A_{\nu+1}$ und $B_\nu > B_{\nu+1}$ gilt, und ist weiter $C_\nu = A_\nu \times B_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), so gilt natürlich auch $C_\nu > C_{\nu+1}$ und falls $A = \bigcap A_\nu$, $B = \bigcap B_\nu$ und $C = \bigcap C_\nu$ gesetzt wird, gilt $C = A \times B$, wie sich leicht mit geläufigen Schlüssen ergibt.

Da nun eine abgeschlossene Menge der Durchschnitt einer monoton fallenden Folge von Intervallpolyedern mit frei wählbarer Orientierung ist, folgt aus der obigen Feststellung in Verbindung mit den geläufigen Stetigkeitseigenschaften des LEBESGUESCHEN Maßes, daß (11a) auch für beliebige abgeschlossene Mengen A und B richtig ist. — Die Ungleichung (11b) gewinnen wir nun in der bekannten Weise durch Betrachtung von $(1/\tau)\phi(A; \tau B)$ mit Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$. Damit ist der Beweis der Ungleichungen (1) und (2) vollständig.

5. Mit den unten folgenden Hilfsaussagen wird der Beweis für die behaupteten Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in den Ungleichungen (1) und (2) vorbereitet. Es wird hierbei $V(A), V(B) > 0$ vorausgesetzt.

Eine Menge A soll hier kurz separierbar heißen, wenn eine Ebene E so existiert, daß einerseits $E \cap A = 0$ und andererseits $A = A' \cup A''$ mit $A' < H'$, $A'' < H''$, $A' \neq 0$, $A'' \neq 0$ gilt, wo H' und H'' die durch E begrenzten, abgeschlossenen Halbräume bezeichnen. Ist $V(A') > 0$ und $V(A'') > 0$, so nennen wir A verschärfend V -separierbar.

Die Hilfsaussagen lauten:

- (A) Ist A separierbar, $V(B) > 0$, so gilt $\phi(A; B) > 0$.
- (B) Ist A V -separierbar, $V(B) > 0$, so gilt $q(A; B) > 0$.
- (C) Ist A konvex, $V(B) > 0$, so gilt mit $q(A; B) = 0$ auch $q(B; A) = 0$.
- (D) Sind A und B konvex, so gilt mit $\phi(A; B) = 0$ auch $q(A; B) = 0$.
- (E) Sind A und B konvex und gilt $q(A; B) = 0$, so sind A und B homothetisch.
- (F) Sind A und B konvex und gilt $\phi(A; B) = 0$, so sind A und B homothetisch.

Es folgen die Beweise:

(A) Durch die durch das Dilatationszentrum hindurchgehende separierende Ebene E werde A in A' und A'' zerlegt. Wegen $E \cap A = 0$ gilt auch $A' \cap A'' = 0$ und mit A sind auch A' und A'' abgeschlossen. Es gibt dann einen von zwei zu E parallel liegenden Stützebenen E' (an A') und E'' (an A'') begrenzten

Parallelstreifen der Dicke $2\sigma > 0$, der im Innern keinen Punkt von A enthält. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß die den Streifen halbierende Symmetrieebene mit E zusammenfällt, daß weiter $E \cap B^0 \neq 0$ [$B^0 = \text{Volumkern von } B$] und daß durch E eine volumtreue Parallelzerlegung von A und B erzeugt wird. Durch eine passende Verschiebung von B im Raum läßt sich dies erzielen. Mit S' bzw. S'' wollen wir den durch E und E' bzw. den durch E und E'' begrenzten Parallelstreifen bezeichnen. Weiter sei K' bzw. K'' der durch E' bzw. E'' begrenzte Halbraum, in dem A' bzw. A'' liegt. Sind B' und B'' die beiden durch E erzeugten Teilmengen von B , so führen wir weiter noch die Mengen $B^* = B' \cap S'$ und $B^{**} = B' \cap S''$ ein. Sind P' und P'' noch zwei Punkte, die den beiden Stützpunkten $E' \cap A'$ und $E'' \cap A''$ angehören, so gilt offensichtlich $P' \times B^{**} \subset S'$ und $P'' \times B^* \subset S''$, da diese MINKOWSKISCHEN Additionen nur die passenden Translationen von B^{**} und B^* bewirken. Ferner gilt $A' \times B' \subset K'$ und $A'' \times B'' \subset K''$. Die vier Mengen $A' \times B'$, $A'' \times B''$, $P' \times B^{**}$, $P'' \times B^*$ sind Teilmengen von $A \times B$; ihre Durchschnitte liegen aber in Ebenen und sind demnach Nullmengen. Deshalb gilt die Relation

$$V(A \times B) \geq V(A' \times B') + V(A'' \times B'') + V(B^*) + V(B^{**})$$

und mit der gleichen Rechnung, die von (5) zu (9) führte, folgert man

$$\phi(A; B) \geq \phi(A'; B') + \phi(A''; B'') + V(B^*) + V(B^{**}).$$

Da $E \cap B^0 \neq 0$ ist, können nicht beide Mengen B^* und B^{**} Nullmengen sein und mit (11) folgt $\phi(A; B) > 0$, w. z. b. w.

(B) Die Bezeichnungen für Teilmengen, Streifen und Halbräume wie beim obenstehenden Beweis. Wählen wir das Dilatationszentrum in E , so kann B durch τB ersetzt werden. Ist τ ausreichend klein, so daß die Breite von τB in der zu E orthogonalen Richtung kleiner als 2σ ist, so gilt

$$(A' \times \tau B) \cap (A'' \times \tau B) = 0$$

und da

$$A \times \tau B = (A' \times \tau B) \cup (A'' \times \tau B)$$

ist, folgt die Relation $V(A \times \tau B) = V(A' \times \tau B) + V(A'' \times \tau B)$ und hieraus leicht $F(A; B) \geq F(A'; B) + F(A''; B)$; ebenso folgt mit passender Umrechnung $q(A; B) \geq q(A'; B) + q(A''; B) + R$, wobei die Restgröße durch

$$R = k V(B)^{1/k} \{ V(A')^{(k-1)/k} + V(A'')^{(k-1)/k} - V(A)^{(k-1)/k} \}$$

gegeben ist. Da A V -separiert ist, sind A' und A'' von positivem Maß; das nämliche trifft für B zu. Mit Rücksicht auf die elementare Ungleichung $u^\theta + v^\theta - (u+v)^\theta > 0$ [$0 < \theta < 1$, $u > 0$, $v > 0$] ist $R > 0$. Mit (11) folgt so $q(A; B) > 0$, w. z. b. w.

(C) Wir führen hier die Quotienten

$$r = r(\varrho) = [V(A \times \varrho B) - V(A)]/\varrho \quad [0 < \varrho < 1]$$

$$s = s(\sigma) = [V(B \times \sigma A) - V(B)]/\sigma \quad [0 < \sigma < 1]$$

ein. Da A konvex ist, gilt $A = (1 - \varrho\sigma)A \times \varrho\sigma A$ und demnach ist

$$A \times \varrho B = (1 - \varrho\sigma)A \times (\varrho\sigma A \times \varrho B).$$

Hieraus folgt mit Anwendung von (1) die Relation

$$V(A \times \varrho B)^{1/k} \geq (1 - \varrho\sigma) V(A)^{1/k} + \varrho V(B \times \sigma A)^{1/k}.$$

Verwenden wir dies in der Darstellung $V(A \times \varrho B) = V(A) + \varrho r$, so läßt sich die Relation

$$V(B \times \sigma A) \leq \{[V(A) + \varrho r]^{1/k} - (1 - \varrho\sigma) V(A)^{1/k}\}^k \varrho^{-k}$$

gewinnen. Dies führt zu einer Abschätzung für s , nämlich

$$s \leq (\{[V(A) + \varrho r]^{1/k} - (1 - \varrho\sigma) V(A)^{1/k}\}^k - \varrho^k V(B)) \varrho^{-k} \sigma^{-1}.$$

Lassen wir hier σ fest und bedenken wir, daß nach Voraussetzung $\liminf_{\varrho \rightarrow 0} r(\varrho) = k V(A)^{(k-1)/k} V(B)^{1/k}$ ist, so läßt sich

$$s \leq (V(A) [V(A)^{-1/k} V(B)^{1/k} + \sigma]^k - V(B)) \sigma^{-1}$$

folgern; es resultiert weiter

$$F(B; A) = \liminf_{\sigma \rightarrow 0} s(\sigma) \leq k V(B)^{(k-1)/k} V(A)^{1/k}.$$

Nach (2) kommt hier nur Gleichheit in Frage. Dies bedeutet aber, daß $q(B; A) = 0$ ist; w. z. b. w.

(D) Es gilt $A \times B = A \times \alpha B \times \beta B$, $[\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1]$. Nach (1) resultiert zunächst $V(A \times B)^{1/k} \geq V(A \times \alpha B)^{1/k} + \beta V(B)^{1/k}$ und mit gleichem Grunde $V(A \times \alpha B)^{1/k} \geq V(A)^{1/k} + \alpha V(B)^{1/k}$, so daß sich zusammen $V(A \times B)^{1/k} \geq V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k}$ ergibt. Nach Voraussetzung kommt hier nur das Gleichheitszeichen in Frage. Dann muß aber auch weiter oben Gleichheit bestehen, so daß auch $p(A; \alpha B) = 0$ ist. Hieraus folgt $q(A; B) = 0$ auf triviale Weise.

(E) (a). Es sei zunächst A ein Simplex. Der Ursprung Z sei innerer Punkt von B , und mit $h_\nu(B)$ ($\nu = 0, 1, \dots, k$) wollen wir die $k+1$ Stützgrößen von B bezüglich Z in den Richtungen der $k+1$ Seitenflächen des Simplex A bezeichnen. Sind $f_\nu(A)$ ($\nu = 0, 1, \dots, k$) die $(k-1)$ -dimensionalen Flächeninhalte der Seitenflächen von A , so erhellt eine einfache Betrachtung, daß

$$V(A \times \varrho B) \geq V(A) + \varrho \sum f_\nu(A) h_\nu(B)$$

sein muß. Hieraus resultiert $F(A; B) \geq \sum f_\nu(A) h_\nu(B)$. Bedeutet jetzt C das dem konvexen Körper B umschriebene, zu A homothetische Simplex, so daß $C = \lambda A$ und $C > B$ gilt, so ist $h_\nu(B) = h_\nu(C) = \lambda h_\nu(A)$; hierbei ist angenommen, daß A und C relativ zum Ursprung Z ähnlich liegen. Bedenkt man, daß $\sum f_\nu(A) h_\nu(A) = k V(A)$ gilt, so ergibt sich die Relation $F(A; B) \geq \lambda k V(A)$. Nach Voraussetzung ist aber $F(A; B) = k V(A)^{(k-1)/k} V(B)^{1/k}$ und so folgt $V(B) \geq \lambda^k V(A) = V(C)$. Wegen $C > B$ schließt man, daß $B = C$, also $B = \lambda A$ sein muß, w. z. b. w.

(b). Ist B ein Simplex, so ergibt sich aus (a) mit Rücksicht auf (C), daß dann A ein homothetisches Simplex darstellt.

(c). Es sei nun A ein beliebiger konvexer Körper. Mit $q(A; B) = 0$ ist $q(A; \lambda B) = 0$ ($\lambda > 0$). Wir wählen λ so, daß $V(A) = V(\lambda B)$ wird. Für die durch volumtreue Parallelzerlegungen von A und λB entstehenden Teilkörper $A' \subset A$ und $\lambda B' \subset \lambda B$ gilt mit Rücksicht auf (10) und (11b) wiederum $q(A'; \lambda B') = 0$ und außerdem bleibt die Volumgleichheit $V(A') = V(\lambda B')$ bestehen. Ist P ein eigentliches Teilsimplex von A , so läßt sich durch höchstens $k+1$ hintereinander ausgeführte volumtreue Parallelzerlegungen von A und λB ein konvexer Teilkörper Q von λB so gewinnen, daß $q(P; Q) = 0$ und $V(P) = V(Q)$ ausfällt. Nach dem in (a) gewonnenen Ergebnis muß Q ein mit P translationsgleiches Simplex sein. Ist umgekehrt Q ein eigentliches Teilsimplex von λB , so folgt aus (b), daß A ein mit Q translationsgleiches Simplex P enthalten muß. Die beiden Körper A und λB enthalten also bis auf Translationen genau dieselben Teilsimplexe. Da sich eine Teilstrecke eines eigentlichen konvexen Körpers stets zu einem eigentlichen Teilsimplex ergänzen läßt, enthalten A und B auch bis auf Translationen die gleichen Teilstrecken. Insbesondere weisen die beiden Körper zwei parallele Durchmessersehnern auf. Wir verschieben B so, daß diese Durchmessersehnern zur Deckung kommen. Wählen wir einen Punkt $a \in A$ beliebig, und betrachten das von a mit der Durchmessersehne gebildete Dreieck, so muß auch λB ein translationsgleiches Dreieck enthalten. Da aber ein konvexer Körper nicht zwei verschiedene parallele Durchmessersehnern aufweisen kann, muß dieses Dreieck mit dem in A liegenden Ausgangsdreieck zusammenfallen. So folgt, daß $a \in \lambda B$ gilt. Demnach muß $A \subset \lambda B$, und wegen der Symmetrie auch $\lambda B \subset A$, oder also $A = \lambda B$ gelten. Also sind A und B homothetisch, w. z. b. w.

(F) Mit $p(A; B) = 0$ folgt nach (D) auch $q(A; B) = 0$ und mit (E) die Behauptung.

6. Es folgten die Beweise für die in Satz I und Satz II behaupteten Gleichheitsbedingungen. Es handelt sich um die beiden Aussagen:

I. Ist $p(A; B) = 0$, $V(A) > 0$, $V(B) > 0$, so sind A und B homothetische konvexe Körper.

II. Ist $q(A; B) = 0$, $V(A) > 0$, $V(B) > 0$ und $A = A^0$, $B = B^0$ [$A^0, B^0 =$ Volumkerne von A, B], so sind A und B homothetische konvexe Körper.

Beweis I. Da A und B positives Maß haben, besitzen sie nichtleere Volumkerne A^0 und B^0 und da $V(A) = V(A^0)$, $V(B) = V(B^0)$, aber $V(A \times B) \geq V(A^0 \times B^0)$ ist, folgt, daß mit $p(A; B) = 0$ auch $p(A^0; B^0) = 0$ gelten muß. Wir zeigen nun, daß A^0 konvex ist. In der Tat: Wir treffen die Gegenannahme, daß A^0 zwei Punkte p und q enthält, nicht aber einen zwischen p und q gelegenen Punkt r der Verbindungsgeraden G . Damit bleibt auch eine Umgebung von r zu A punktfremd. Durch k sukzessive ausgeführte volumtreue Parallelzerlegungen von A und B , erzeugt durch k passend gewählte, zur Geraden G in hinreichend kleinem positiven Abstand parallel gelegte Ebenen, läßt sich daher ein Teilmengenpaar A^{00} und B^{00} so gewinnen, daß A^{00} durch die in r orthogonal zu G gelegte Ebene separiert wird und p und q enthält. Da p und q volumverbunden sind, ist A^{00} sogar V -separiert. Da $V(A^{00}) > 0$,

folgt mit der Volumtreue der Zerlegung auch $V(B^{00}) > 0$. Aus (9) und (11) folgert man wie früher, daß auch $\phi(A^{00}; B^{00}) = 0$ gilt. Dies steht im Widerspruch zur Hilfsaussage (A). Also ist A^0 konvex und wegen der Symmetrie $\phi(A; B) = \phi(B; A)$ ist auch B^0 konvex. Nach Hilfsaussage (F) sind A^0 und B^0 homothetisch. Wir zeigen jetzt, daß $A = A^0$ ist. Andernfalls sei p ein Punkt des Schleiers von A und es sei $A^1 = A^0 \cup p$. Mit $\phi(A; B) = 0$ folgt trivial auch $\phi(A^1; B^0) = 0$ und nun ist A^1 separierbar, da p nicht zu A^0 gehört und A^0 konvex ist. Mit $V(B^0) > 0$ folgt aus Hilfsaussage (A) ein Widerspruch. Wegen der Symmetrie gilt auch $B = B^0$ und damit ist der Nachweis der Behauptung I erbracht.

Beweis II. Wir zeigen, daß A^0 konvex ist. Ausgehend von der Gegenannahme erzeugen wir durch die gleichen volumtreuen Parallelzerlegungen, wie sie beim Beweis I erörtert wurden, das Teilmengenpaar A^{00} und B^{00} und schließen jetzt wieder aus (10) und (11), daß mit $q(A^0; B^0) = 0$ auch $q(A^{00}; B^{00}) = 0$ sein muß. Da aber A^{00} V -separierbar und $V(B^{00}) > 0$ ist, haben wir einen Widerspruch mit Hilfsaussage (B). Da also A^0 konvex ist, folgt mit Hilfsaussage (C) auch $q(B^0; A^0) = 0$ und hieraus wieder, daß auch B^0 konvex ist. Nach Hilfsaussage (E) sind A^0 und B^0 , also A und B homothetisch. Damit ist auch die Behauptung II bewiesen.

7. Noch eine Schlußbemerkung zur Entstehung der vorliegenden Abhandlung: Die gesamte Planung, insbesondere die induktive Konstruktion mit den beiden BRUNN-MINKOWSKISCHEN Defiziten [(7) und (8)] und ihr Einsatz zum Nachweis der Gleichheitsbedingungen stammt vom zweiten Verfasser. Der erste Verfasser hat lediglich verschiedene Kürzungen und methodische Bereinigungen vorgenommen und den Symmetriesatz (Hilfsaussage C) eingebaut, der gestattet, sich bei der Formulierung der Gleichheitsbedingung im isoperimetrischen Satz (Satz II) von einer zusätzlichen Voraussetzung über die Konvexität der zweiten Menge zu befreien.

Mathematisches Seminar der Universität Bern
Scuola Germanica Milano

(Eingegangen am 26. November 1955)

On the integrability of functions defined by trigonometrical series

By
 CHEN YUNG-MING

1. This note is concerned with some integrability properties with trigonometric series with monotone coefficients. Suppose λ_n is positive and decreases steadily to zero as $n \rightarrow \infty$, then in any interval $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ the series

$$(1.1) \quad f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^{\infty} \lambda_n \cos nx,$$

$$(1.2) \quad g(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_n \sin nx$$

converge uniformly ([5], § 1.23).

The aim of this note is to establish some necessary and sufficient conditions of the integrability of $x^{-Y} \{f(x)\}^p$, $x^{-Y} \{g(x)\}^p$ for $p > 0$; while $p=1$ had been completed previously by BOAS [1] and HEYWOOD ([4] (I), (II)). I shall now prove that if $p > 1$, $0 < Y < 1$; $x^{-Y} \{f(x)\}^p$, $x^{-Y} \{g(x)\}^p$ are integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$(1.3) \quad \sum_1^{\infty} n^{Y+p-2} \lambda_n^p$$

is convergent (Theorem 1, Theorem 2). These theorems had previously been proved for $Y=0$ by HARDY and LITTLEWOOD [2], [3]. If $0 < p < 1$, $Y > 0$, and if λ_n decreases steadily to zero, and $\{\lambda_n\}$ is a convex sequence such that $n\lambda_n$ is non-decreasing; $x^{-Y} \{g(x)\}^p$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent (Theorem 3). In the following theorems, I shall denote C_i ($i=1, 2, 3, \dots$) positive constants depending only on p and Y .

2. LEMMA 1. If a trigonometric series converges except for an enumerable number of points, to an integrable function $f(x)$, the series is the FOURIER series of $f(x)$ ([5], § 11.32).

LEMMA 2 ([5], § 4.17). Let (i) $p > 1$, (ii) $Y > 1 - p$, $f(x) \in L(0, \infty)$, $F(x) = \int_0^x |f(x)| dx$, and if $x^{-Y} \{f(x)\}^p \in L(0, \infty)$, then

$$(2.1) \quad \int_0^{\infty} \left\{ \frac{F(x)}{x} \right\}^p x^{-Y} dx \leq C_1 \int_0^{\infty} x^{-Y} |f(x)|^p dx.$$

THEOREM 1. Suppose that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \rightarrow 0$,

$$(2.2) \quad f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^{\infty} \lambda_n \cos nx.$$

Then for: (i) $p > 1$, (ii) $0 < Y < 1$; $x^{-Y}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if the series

$$(2.3) \quad \sum_1^{\infty} n^{Y+p-2} \lambda_n^p$$

is convergent.

THEOREM 2. If $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \rightarrow 0$,

$$(2.4) \quad g(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_n \sin nx.$$

Then for: (i) $p > 1$, (ii) $0 < Y < 1$; $x^{-Y}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if the series (2.3) is convergent.

Proof of Theorem 1 and Theorem 2.

The proofs of Theorem 1, Theorem 2 are similar to a proof given in ([5], p. 212/3); except some changes should be added. I shall now present an exemplifying proof of Theorem 2:

(a) To show that the condition is necessary, suppose that $\int_0^{\pi} x^{-Y} |g(x)|^p dx$ is finite, it follows that $g(x) \in L^p(0, \pi)$; the series (2.4) is $L(0, \pi)$. By Lemma 1, $\sum_1^{\infty} \lambda_n \sin nx$ is the FOURIER series of $g(x)$. The series can be term by term integrated. Let $G(x) = \int_0^x g(x) dx$, $H(x) = \int_0^x |g(x)| dx$. Then

$$(2.5) \quad \begin{cases} G(x) = \sum_1^{\infty} (\lambda_n/n) (1 - \cos nx) \\ \quad = 2 \sum_1^{\infty} (\lambda_n/n) \sin^2(nx/2). \end{cases}$$

Since $\sin u \geq u/\pi$ ($0 < u < \pi/2$), we have

$$(2.6) \quad \begin{cases} G(\pi/2n) \geq 2 \sum_{m=[n/3+1]}^{[2n/3]} \left(\frac{\lambda_m}{m} + \frac{\lambda_{m+n}}{m+n} + \cdots \right) \sin^2(m\pi/2n) \\ \quad \geq C_2 \lambda_n. \end{cases}$$

But since $0 < Y < 1$, $Y + p - 2 < p - 1$, $H(x)$ is a non decreasing function of x . By Lemma 2,

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_2^{\infty} n^{Y+p-2} \lambda_n^p &\leq C_3 \sum_2^{\infty} n^{Y+p-2} \{G(\pi/2n)\}^p \\ &\leq C_3 \sum_2^{\infty} n^{Y+p-2} \{H(\pi/2n)\}^p \\ &\leq C_4 \sum_2^{\infty} \int_{\pi/n}^{\pi/(n-1)} x^{-Y} \left\{ \frac{H(x/2)}{x} \right\}^p dx \\ &\leq C_5 \sum_2^{\infty} \int_{\pi/2n}^{\pi/2(n-1)} x^{-Y} \left\{ \frac{H(x)}{x} \right\}^p dx \\ &\leq C_5 \int_0^{\pi} x^{-Y} \left\{ \frac{H(x)}{x} \right\}^p dx \\ &\leq C_6 \int_0^{\pi} x^{-Y} |g(x)|^p dx. \end{aligned} \right.$$

(b) To show that the condition is sufficient, consider the partial sums $q_n(x)$ of the series $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots$

$$(2.8) \quad q_n(x) = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = O(x^{-1}).$$

By a corollary of ABEL's formula ([5], § 1.22),

$$(2.9) \quad |g(x)| \leq \sum_1^n |\lambda_\nu| + \left| \sum_{n+1}^\infty \lambda_\nu \sin \nu x \right| \leq L_n + \pi \lambda_n/x,$$

$$(2.10) \quad L_n = \sum_1^n \lambda_\nu \geq n \lambda_n.$$

We have then

$$(2.11) \quad |g(x)| \leq C_7 L_n \quad (\pi/(n+1) \leq x \leq \pi/n)$$

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi x^{-Y} |g(x)|^p dx &= \sum_1^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} x^{-Y} |g(x)|^p dx \\ &\leq C_8 \sum_1^\infty L_n^p \{n^{Y-1} - (n+1)^{Y-1}\} \\ &\leq C_9 \sum_1^\infty n^{Y-2} L_n^p. \end{aligned} \right.$$

It remains to show that (2.12) is convergent if (2.3) is convergent. Let $l(x) = \lambda_n$, $n-1 \leq x < n$; $L(x) = \int_0^\infty l(x) dx \sim L_{[x]}$, as x tends to infinity. Since $Y + p - 2 > -1$, $\sum_1^\infty n^{Y+p-2} \lambda_n^p < \infty$ implies $\{l(x)\}^p x^{Y+p-2} \in L(0, \infty)$, where $0 < Y < 1$, $Y + p - 2 < p - 1$. By Lemma 2,

$$(2.13) \quad \int_0^\infty x^{Y+p-2} \{L(x)/x\}^p dx < \infty.$$

It follows that

$$(2.14) \quad [x]^{Y-2} L_{[x]}^p \in L(1, \infty).$$

The right of (2.12) is convergent. This completes the proof of Theorem 2.

REMARK 1. If λ_n is ultimately positive, and decreases steadily to zero as n tends to infinity; Theorem 1, Theorem 2 remain true. It is sufficient to consider an exemplifying proof for Theorem 1. Suppose that, if $n \geq N$,

$$\lambda_n \geq \lambda_{n+1} \geq \dots \rightarrow 0.$$

Then $f(x) = \Phi(x) - P_N(x)$, where $\Phi(x)$ satisfying the conditions of Theorem 1 and $P_N(x)$ is a trigonometric polynomial of order N .

$$(2.15) \quad |P_N(x)| < C_{10},$$

$$(2.16) \quad |f(x)| \leq 2 \max \{\Phi, C_{10}\},$$

$$(2.17) \quad |f(x)|^p \leq C_{11} |\Phi(x)|^p + C_{12}.$$

But since $0 < Y < 1$, we have

$$(2.18) \quad \int_0^\pi x^{-Y} |f(x)|^p dx \leq C_{11} \int_0^\pi x^{-Y} |\Phi(x)|^p dx + C_{12},$$

so that if N is finite, the result of Theorem 1 remains true.

3. THEOREM 3. If (i) $0 < p < 1$, (ii) $Y > 0$, (iii) $\{\lambda_n\}$ is convex, and decreases steadily to zero, such that $n\lambda_n$ is non-decreasing;

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx.$$

Then $x^{-Y}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if the series (1.3) is convergent.

For the proof, it may be seen that Theorem 3 is a nearly trivial consequence of the following lemma:

LEMMA 3 ([5], § 5.211). If λ_n is a convex sequence and decreases steadily to zero such that $n\lambda_n$ is non-decreasing, the sum of the series

$$(3.1) \quad g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx \sim x^{-1} \lambda_n,$$

when $\pi/2n \leq x \leq \pi/2(n-1)$, $n \rightarrow \infty$.

REMARK 2. (a) In case λ_n is ultimately decreasing to zero, Theorem 3 remains true. The proof is nearly the same as in Remark 1.

(b) If $\sum_1^\infty n^{Y+p-2} \lambda_n^p$ is convergent, on account of $n\lambda_n$ is non-decreasing, we conclude that $0 < Y < 1$.

My thanks are due to the referee for some improvements in the presentation of this note.

References

- [1] BOAS, R. P.: Integrability of trigonometric series (III). *Quart. J. Math. (Oxford)* (2) **3**, 217—221 (1952). — [2] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. *Math. Annalen* **97**, 159—209 (1926). — [3] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. *J. London Math. Soc.* **6**, 3—9 (1931). — [4] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. (I) *Quart. J. Math. (Oxford)* (5) **17**, 71—76 (1954); (II) *ibid.* (6) **21**, 77—79 (1955). — [5] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical Series* (Warszawa-Lwów, 1935).

Department of Mathematics, Nanyang University, Jurong Road, Singapore

(Eingegangen am 18. Februar 1956)

Weighted partitions for symmetric matrices in a finite field

By

JOHN H. HODGES

1. *Introduction.* For $\alpha \in GF(q)$, where $q = p^f$ is odd, put

$$(1.1) \quad e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}, \quad t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \dots + \alpha^{p^{f-1}}.$$

If $A = (\alpha_{ij})$ is a square matrix with elements in $GF(q)$, define $\sigma(A) = \sum_i \alpha_{ii}$. In this paper we consider the sum

$$(1.2) \quad S = S(B, U, A) = \sum_{X'AX=B} e\{\sigma(U'X + X'U)\},$$

where A is a non-singular symmetric matrix of order m , B is a symmetric matrix of order t , U is an arbitrary $m \times t$ matrix and the summation is over all $m \times t$ matrices X satisfying the equation $X'AX = B$, all matrices having elements in $GF(q)$. If $U = 0$, S is the number of solutions X of $X'AX = B$, which is given in [3]. In [2], L. CARLITZ has treated the problem for $t=1$, finding explicit values for this S in all except one case and in all cases expressing this S in terms of certain Kloosterman sums over $GF(q)$. In the present paper it is shown that the general sum (1.2) can be expressed in terms of generalized Kloosterman sums defined for symmetric matrices over $GF(q)$. A number of properties of these Kloosterman sums are also given.

2. *Notation and preliminaries.* Let $q = p^f$, p odd. Numbers of $GF(q)$ will be denoted by lower case Greek letters $\alpha, \beta, \dots$ except as indicated. Italic capitals $A, B, \dots$ will denote matrices with elements in $GF(q)$. $A(m, n)$ will denote a matrix of m rows and n columns; the transpose of A will be denoted by A' . If A is a symmetric matrix of order m and rank r , there exists a non-singular matrix T such that $T'AT = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$ where $\alpha_i \neq 0$. The number $\lambda(A) = \psi(\delta(A))$, where $\delta(A) = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$ and $\psi(\alpha) = 0, 1, -1$ according as α is zero, a square or a non-square of $GF(q)$, is called the *invariant* of A .

If $A = (\alpha_{ij})$, then $\sigma(A) = \sum_i \alpha_{ii}$ is the *trace* of A . If $A = (\alpha_{ij})$ and $B = (\beta_{ij})$ are symmetric, then $\sigma(AB) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij}$.

For $\alpha \in GF(q)$ we define

$$(2.1) \quad e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}, \quad t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \dots + \alpha^{p^{f-1}},$$

from which it follows that $e(\alpha + \beta) = e(\alpha) e(\beta)$ and

$$(2.2) \quad \sum_{\xi} e(\alpha \xi) = \begin{cases} q & (\alpha = 0) \\ 0 & (\alpha \neq 0), \end{cases}$$

where the summation is over all $\xi \in GF(q)$. We define the Gauss sum [1; § 3]

$$(2.3) \quad G(\alpha) = \sum_{\xi} e(\alpha \xi^2).$$

Then we have

$$(2.4) \quad G(\alpha) = \psi(\alpha) G(1) \quad (\alpha \neq 0);$$

moreover

$$(2.5) \quad G^2(1) = \psi(-1) q.$$

If A is a symmetric matrix of order m then using (2.2) we may show that

$$(2.6) \quad \sum_B e\{\sigma(AB)\} = \begin{cases} q^{\frac{1}{2}m(m+1)} & (A=0) \\ 0 & (A \neq 0), \end{cases}$$

where the summation is over all symmetric matrices B of order m .

We will also need the well-known formula for the number of non-singular matrices of order m , namely

$$(2.7) \quad g_m = \prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i) = q^{m^2} \prod_{i=1}^m (1 - q^{-i}).$$

3. *The sum $S(B, U, A)$.* Let A be a non-singular symmetric matrix of order m , B a symmetric matrix of order t and U an arbitrary $m \times t$ matrix. Then we define

$$(3.1) \quad S = S(B, U, A) = \sum_X e\{\sigma(U'X + X'U)\},$$

where the summation is over all $m \times t$ matrices X satisfying the equation $X'AX = B$. In view of (2.6) we may write

$$(3.2) \quad \begin{cases} q^{\frac{1}{2}t(t+1)} S = \sum_X e\{\sigma(U'X + X'U)\} \sum_C e\{\sigma((X'AX - B)C)\} \\ = \sum_C e\{-\sigma(BC)\} \sum_X e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\}, \end{cases}$$

where the summations are over all $X = X(m, t)$ and all symmetric C of order t . In order to proceed further we divide the C 's in the right member of (3.2) into three classes: $C=0$, $|C|=0$ but $C \neq 0$, and $|C| \neq 0$. If we group together all C 's in the same class, the right member of (3.2) breaks up into three sums, which we label S_1, S_2, S_3 and consider separately.

Corresponding to $C=0$ on the right of (3.2) we consider

$$(3.3) \quad S_1 = \sum_{X(m, t)} e\{\sigma(U'X + X'U)\} = \sum_{X(m, t)} e\{\sigma(2U'X)\}.$$

With $U = (\mu_{ij})$ and $X = (\xi_{ij})$, (3.3) becomes

$$(3.4) \quad S_1 = \sum_{X(m, t)} e\left\{2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t \mu_{ij} \xi_{ij}\right\} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^t \sum_{\xi} e(2\mu_{ij} \xi),$$

where the inner sum on the right is over all $\xi \in GF(q)$. In view of (2.2), (3.4) gives

THEOREM 1. If S_1 is the sum defined by (3.3), then

$$(3.5) \quad S_1 = \begin{cases} q^{mt} & (U = 0) \\ 0 & (U \neq 0). \end{cases}$$

4. The sum S_3 . Corresponding to the C 's on the right of (3.2) for which $|C| \neq 0$ we consider the sum

$$(4.1) \quad S_3 = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X(m,t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\},$$

where A is symmetric and non-singular of order m , B is symmetric of order t , and C runs through all non-singular symmetric matrices of order t . For a fixed C , if we put

$$Y = X + A^{-1}UC^{-1},$$

it is clear that as X runs through all $m \times t$ matrices, Y does likewise. Putting $W = U'A^{-1}U$ we have

$$\sigma(CX'AX + U'X + X'U) = \sigma(CY'AY - WC^{-1}).$$

Therefore

$$(4.2) \quad \sum_{X(m,t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\} = e\{-\sigma(WC^{-1})\} \sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(CY'AY)\}.$$

From [3; § 5] we have

$$(4.3) \quad \sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(CY'AY)\} = \lambda^m(C) \lambda^t(A) G^{mt}(1),$$

where $\lambda(C)$ and $G(1)$ are defined in 2. If we use the value (4.3) for the inner sum in the right member of (4.2), substitute the resulting expression into (4.1), and simplify we get

$$(4.4) \quad S_3 = \lambda^t(A) G^{mt}(1) \sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C) e\{\sigma(BC + WC^{-1})\}.$$

5. Generalized Kloosterman sums. If B and W are symmetric matrices of order n we define the generalized Kloosterman sums

$$(5.1) \quad K_n(B, W) = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\}, \quad K_n(B) = K_n(B, I),$$

and

$$(5.2) \quad L_n(B, W) = \sum_{|C| \neq 0} \lambda(C) e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\}, \quad L_n(B) = L_n(B, I),$$

where the summations are over all non-singular symmetric matrices C of order n . In [3; § 7] L. CARLITZ has defined the sum

$$H(B, r, \lambda) = \sum_C e\{-\sigma(BC)\},$$

where the summation is over all symmetric C of order n , rank r and invariant λ . Using the definitions (5.1) and (5.2) we can easily show that

$$(5.3) \quad K_n(B, 0) = K_n(0, B) = H(B, n, 1) + H(B, n, -1)$$

and

$$(5.4) \quad L_n(B, 0) = L_n(0, B) = H(B, n, 1) - H(B, n, -1).$$

If V is a non-singular symmetric matrix of order n , we have

$$(5.5) \quad K_n(VB, WV^{-1}) = K_n(B, W) \quad \text{and} \quad K_n(BV) = K_n(B, V),$$

and

$$(5.6) \quad L_n(VB, WV^{-1}) = \lambda(V) L_n(B, W) \quad \text{and} \quad L_n(BV) = \lambda(V) L_n(B, V).$$

6. S_3 in terms of Kloosterman sums. If C is a non-singular symmetric matrix of order t then $\lambda(C) = \pm 1$. If B and W are symmetric matrices of order t , then for m even, since $\lambda^m(C) = 1$, we have using the definition (5.1)

$$(6.1) \quad \sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C) e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} = K_t(B, W).$$

For m odd, since $\lambda^m(C) = \lambda(C)$, using (5.2) we have

$$(6.2) \quad \sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C) e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} = L_t(B, W).$$

Since $G^2(1) = \psi(-1)q$, (6.1) and (6.2) together with (4.4) give

THEOREM 2. If A is non-singular and symmetric of order m , B is symmetric of order t , and S_3 is the sum defined by (4.1), then

$$(6.3) \quad S_3 = \begin{cases} \lambda^t(A) \psi^{n^t}(-1) q^{n^t} K_t(B, W), & (m = 2n), \\ \lambda^t(A) \psi^{n^t}(-1) q^{n^t} G^t(1) L_t(B, W), & (m = 2n + 1), \end{cases}$$

where $W = U'A^{-1}U$.

7. The sum S_2 . Corresponding to the C 's on the right of (3.2) for which $|C| = 0$ but $C \neq 0$ we consider the sum

$$(7.1) \quad S_2 = \sum_C e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X(m, t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\},$$

where the outer summation is over all symmetric C of order t such that $|C| = 0$ but $C \neq 0$.

For fixed r , $0 < r < t$, let C_r denote a symmetric matrix of order t having a non-singular array of order r in its upper left-hand corner and zero's elsewhere. Let $C_r(\lambda)$ denote a C_r having invariant λ . The number of such $C_r(\lambda)$ is clearly $N(r, r, \lambda)$, where $N(m, r, \lambda)$ is the number of symmetric matrices of order m , rank r and invariant λ . From [3; Theorem 3] we have

$$(7.2) \quad N(r, r, \lambda) = \frac{g_r}{E(r, \lambda)},$$

where $E(m, \lambda)$, the number of non-singular V of order m such that $V'AV = A$ with A non-singular and symmetric of order m and invariant λ , is given by

[3; Theorem 2]. In [3; § 4] CARLITZ shows that as V runs through all non-singular matrices of order t the form $VC_r(\lambda) V'$ runs through all matrices of order t , rank r and invariant λ , each such matrix appearing the same number of times, namely

$$(7.3) \quad h_t(r, \lambda) = q^{r(t-r)} g_{t-r} E(r, \lambda).$$

Therefore, if $f(x)$ is a function defined for symmetric matrices of order t and rank r we have

$$(7.4) \quad \sum_C f(C) = \sum_{|V| \neq 0} \sum_{\lambda} \frac{1}{N(r, r, \lambda)} \sum_{C_r(\lambda)} \frac{1}{h_t(r, \lambda)} f[VC_r(\lambda) V'],$$

where the summations are over all symmetric C of order t and rank r , all non-singular V of order t , $\lambda = \pm 1$ and all $C_r(\lambda)$ as defined above. In view of (7.2) and (7.3), (7.4) simplifies to give

$$(7.5) \quad \sum_C f(C) = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V| \neq 0} \sum_{C_r} f(VC_r V'),$$

where the inner sum on the right is over all symmetric C_r as defined above.

For fixed C_r and non-singular V of order t , if we put $X = TYV^{-1}$ and $U^* = T'U(V^{-1})'$, where $X = X(m, t)$ and $U = U(m, t)$, we can write

$$(7.6) \quad \sum_{X(m, t)} e\{\sigma(VC_r V' X' A X + U' X + X' U)\} = \sum_{Y(m, t)} e\{\sigma(C_r Y' N Y + U^* Y + Y' U^*)\},$$

where A is symmetric and non-singular of order m and the summations are over all $m \times t$ matrices X and Y , and $T'AT = N = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

If we put $C_r = (\gamma_{ij})$ with $\gamma_{ij} = 0$ for $i > r$ or $j > r$, $Y = (\xi_{ki})$, $U^* = (\mu_{ij})$ we have

$$\begin{aligned} \sigma(C_r Y' N Y + U^* Y + Y' U^*) &= \sum_{i,j=1}^r \gamma_{ij} \sum_{k=1}^m \alpha_k \xi_{ki} \xi_{kj} + 2 \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^m \mu_{ki} \xi_{ki} \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^r \gamma_{ij} \sum_{k=1}^m \alpha_k \xi_{ki} \xi_{kj} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^m \mu_{ki} \xi_{ki} \right\} + 2 \sum_{i=r+1}^t \sum_{k=1}^m \mu_{ki} \xi_{ki}. \end{aligned}$$

Then, with $Y_1 = (\xi_{ki})$ for $1 \leq i \leq r$, $Y_2 = (\xi_{ki})$ for $r+1 \leq i \leq t$, $U_1^* = (\mu_{ij})$ for $1 \leq j \leq r$, $U_2^* = (\mu_{ij})$ for $r+1 \leq j \leq t$, and $C_0 = (\gamma_{ij})$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$, it is clear that we can write

$$(7.7) \quad \begin{cases} \sum_{Y(m, t)} e\{\sigma(C_r Y' N Y + U^* Y + Y' U^*)\} \\ = \sum_{Y_1(m, r)} e\{\sigma(C_0 Y_1' N Y_1 + U_1^* Y_1 + Y_1' U_1^*)\} \cdot \sum_{Y_2(m, t-r)} \prod_{i=r+1}^t \prod_{k=1}^m e(2\mu_{ki} \xi_{ki}). \end{cases}$$

If we use (2.2), we see that the inner sum in the right member of (7.7) becomes

$$(7.8) \quad f_r(U^*) = \prod_{i=r+1}^t \prod_{k=1}^m \sum_{\xi} e(2\mu_{ki}\xi) = \begin{cases} q^{m(t-r)} & (\mu_{ki} = 0, r+1 \leq i \leq t) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

where ξ runs through all numbers of $GF(q)$. Since $f_r(U^*)$ is independent of Y_1 , (7.7) becomes

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{Y^{(m,t)}} e\{\sigma(C_r Y' N Y + U^{*'} Y + Y' U^*)\} \\ = f_r(U^*) \sum_{Y_1^{(m,r)}} e\{\sigma(C_0 Y_1' N Y_1 + U_1^{*'} Y_1 + Y_1' U_1^*)\}. \end{array} \right.$$

If B is symmetric of order t and V is non-singular of order t , let $B^* = V' B V = (\beta_{ij})$ and $B_0^* = (\beta_{ij})$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$. Then with C_r and C_0 defined as above we can show that

$$(7.10) \quad e\{\sigma(-BVC_r V')\} = e\{\sigma(-B_0^* C_0)\}.$$

Now, in view of (7.5), we can write for $0 < r < t$,

$$(7.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2(r) = \sum_C e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X^{(m,t)}} e\{\sigma(CX'NX + U'X + X'U)\} \\ = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V| \neq 0} \sum_{C_r} e\{-\sigma(BVC_r V')\} \times \\ \times \sum_{X^{(m,t)}} e\{\sigma(VC_r V' X' N X + U'X + X'U)\}, \end{array} \right.$$

where A is symmetric and non-singular of order m , B is symmetric of order t , and the summations are over all symmetric C of order t and rank r , all non-singular V of order t , and all symmetric C_r as defined above. If we use (7.6), (7.9) and (7.10) on the right side of (7.11) we get

$$(7.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2(r) = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V| \neq 0} f_r(U^*) \sum_{|C_0| \neq 0} e\{-\sigma(B_0^* C_0)\} \times \\ \times \sum_{Y_1^{(m,r)}} e\{\sigma(C_0 Y_1' N Y_1 + U_1^{*'} Y + Y' U_1^*)\}, \end{array} \right.$$

where C_0 runs through all non-singular symmetric matrices of order r , $U^* = T' U (V^{-1})' = (\mu_{ij})$ and $U_1^* = (\mu_{ij})$ for $1 \leq j \leq r$, $B^* = V' B V = (\beta_{ij})$ and $B_0^* = (\beta_{ij})$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$. Taken together, the two inner sums in the right member of (7.12) correspond to the sum S_3 defined by (4.1). Consequently, with $W_0^* = (U_1^*)' N^{-1} U_1^*$, if we apply Theorem 2 to these inner sums, (7.12) becomes

$$(7.13) \quad S_2(r) = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V| \neq 0} f_r(U^*) \left\{ \begin{array}{l} \lambda^r(A) \psi^{nr}(-1) q^{nr} K_r(B_0^*, W_0^*) \quad (m=2n) \\ \lambda^r(A) \psi^{nr}(-1) q^{nr} G^r(1) L_r(B_0^*, W_0^*) \quad (m=2n+1). \end{array} \right.$$

In view of the definition (7.11) of $S_2(r)$ it is clear that S_2 as defined by (7.1) is the sum of all $S_2(r)$ for $0 < r < t$. Thus, we have proved

THEOREM 3. *If A is non-singular and symmetric of order m and B is symmetric of order t , and S_2 is the sum defined by (7.1), then*

$$(7.14) \quad \left\{ \begin{aligned} S_2 &= \sum_{r=1}^{t-1} \frac{\lambda^r(A) \psi^{nr}(-1) q^{r(m-t+r)}}{g_r g_{t-r}} \times \\ &\times \begin{cases} \sum_{|V| \neq 0} f_r(U^*) K_r(B_0^*, W_0^*) & (m = 2n) \\ G^r(1) \sum_{|V| \neq 0} f_r(U^*) L_r(B_0^*, W_0^*) & (m = 2n + 1), \end{cases} \end{aligned} \right.$$

where the summations in (7.14) are over all non-singular V of order t ; $U^* = T'U(V^{-1})' = (\mu_{ij})$, $U_1^* = (\mu_{i1})$ for $1 \leq j \leq r$, and $W_0^* = (U_1^*)'N^{-1}U_1^*$; $B^* = V'BV = (\beta_{ij})$ and $B_0^* = (\beta_{i1})$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$; and $f_r(U)$, $K_r(B, W)$ and $L_r(B, W)$ are defined by (7.8), (5.1) and (5.2) respectively and $T'AT = N$ is the normal form of A .

8. The main result. We are now able to sum up the results we have obtained in the

MAIN THEOREM. *Let A be a non-singular symmetric matrix of order m , B a symmetric matrix of order t and U an arbitrary $m \times t$ matrix. Then if $S = S(B, U, A)$ is the sum defined by (3.1), we have*

$$(8.1) \quad S = q^{-\frac{1}{2}t(t+1)}(S_1 + S_2 + S_3),$$

where S_1 , S_2 and S_3 are given by Theorems 1, 3, 2, respectively.

It is of interest to perform a check on S_2 . Let us define $f_t(U) = 1$ where U is an $m \times t$ matrix and consider (7.13) for $r = t$. In this case $U_1^* = U^*$, $W_0^* = V^{-1}W(V^{-1})'$ and $B_0^* = B^* = V'BV$ so that (7.13) becomes

$$(8.2) \quad S_2(t) = \frac{\lambda^t(A) \psi^{nt}(-1) q^{nt}}{g_t} \begin{cases} \sum_{|V| \neq 0} K_t(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})') & (m = 2n) \\ G^t(1) \sum_{|V| \neq 0} L_t(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})') & (m = 2n + 1). \end{cases}$$

Since, for $|V| \neq 0$, by (5.5) and (5.6) we have

$$K_t(V'BV, (V^{-1})') = K_t(V'B, W(V^{-1})') = K_t(B, W)$$

and

$$L_t(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})') = \lambda(V) L_t(V'B, W(V^{-1})') = L_t(B, W),$$

it is clear that the summands in (8.2) are independent of V . Since the number of non-singular V of order t is g_t , (8.2) reduces to

$$(8.3) \quad S_2(t) = \lambda^t(A) \psi^{nt}(-1) q^{nt} \begin{cases} K_t(B, W) & (m = 2n) \\ G^t(1) L_t(B, W) & (m = 2n + 1), \end{cases}$$

which coincides with the value of S_3 given by Theorem 2.

9. Further properties of the Kloosterman sums. In the definition (5.1) of $K_n(B, W)$ replace B by $B - X'AX$, where A is symmetric and non-singular

of order m and $X = X(m, n)$. Then summing over all $X(m, n)$ we get

$$(9.1) \quad \sum_{X(m, n)} K_n(B - X'AX, W) = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} \sum_{X(m, n)} e\{\sigma(CX'AX)\},$$

where C runs through all non-singular symmetric matrices of order n . Using (4.3) the right member of (9.1) becomes

$$\sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} \lambda^n(C) \lambda^m(A) G^{mn}(1).$$

Therefore, in view of the definitions of $K_n(B, W)$ and $L_n(B, W)$, this proves (compare [3; equation (7.5)])

THEOREM 4. *If B is symmetric of order n and A is non-singular and symmetric of order m , then*

$$(9.2) \quad \sum_{X(m, n)} K_n(B - X'AX, W) = \lambda^n(A) G^{mn}(1) \begin{cases} K_n(B, W) & (m \text{ even}) \\ L_n(B, W) & (m \text{ odd}), \end{cases}$$

where $K_n(B, W)$ and $L_n(B, W)$ are defined by (5.1) and (5.2).

In similar fashion we may prove

THEOREM 5. *If B is symmetric of order n and A is non-singular and symmetric of order m , then*

$$(9.3) \quad \sum_{X(m, n)} L_n(B - X'AX, W) = \lambda^n(A) G^{mn}(1) \begin{cases} L_n(B, W) & (m \text{ even}) \\ K_n(B, W) & (m \text{ odd}). \end{cases}$$

If we multiply $K_n(B, W)$ by $e\{\sigma(BS)\}$ and sum over all symmetric B of order n we get (compare [3; equation (7.6)])

$$(9.4) \quad \sum_B K_n(B, W) e\{\sigma(BS)\} = \begin{cases} 0 & (|S| = 0) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)} e\{-\sigma(W S^{-1})\} & (|S| \neq 0). \end{cases}$$

Similarly

$$(9.5) \quad \sum_B L_n(B, W) e\{\sigma(B, S)\} = \begin{cases} 0 & (|S| = 0) \\ \lambda(S) q^{\frac{1}{2}n(n+1)} e\{-\sigma(W S^{-1})\} & (|S| \neq 0). \end{cases}$$

We may easily prove (compare [3; equation (7.8)])

THEOREM 6. *If B_1, B_2, W_1, W_2 are fixed symmetric matrices of order n , then*

$$(9.6) \quad \sum_B K_n(B_1 + B, W_1) K_n(B_2 - B, W_2) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} K_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

$$(9.7) \quad \sum_B L_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} K_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

$$(9.8) \quad \sum_B K_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_1) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} L_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

where the sums are over all symmetric B of order n .

We will give the proof of (9.7). The proofs of (9.6) and (9.8) are similar. We have

$$\begin{aligned} & L_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_1 - B, W_2) \\ &= \sum_{|C| \neq 0} \lambda(C) e\{-\sigma((B_1 + B)C + W_1 C^{-1})\} \cdot \sum_{|D| \neq 0} \lambda(D) e\{-\sigma((B_2 - B)D + W_2 D^{-1})\} \\ &= \sum_{|C| \neq 0} \sum_{|D| \neq 0} \lambda(C) \lambda(D) e\{-\sigma(B_1 C + B_2 D + W_1 C^{-1} + W_2 D^{-1})\} e\{-\sigma(B(C - D))\}. \end{aligned}$$

If we sum over all symmetric B of order n , by (2.6) the inner sum vanishes except for $C = D$ when it has the value $q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. Therefore, since $\lambda^2(C) = 1$ for $|C| \neq 0$,

$$\sum_B L_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma((B_1 + B_2)C + (W_1 + W_2)C^{-1})\},$$

which by definition of $K_n(B, W)$ is (9.7).

Noting that $K_n(-B, -W)$ and $L_n(-B, -W)$ are the complex conjugates of $K_n(B, W)$ and $L_n(B, W)$, if we take $B_1 = B_2 = 0$ and $W_2 = -W_1 = -W$ in (9.6) and (9.7), and use the fact that $K_n(0, 0) = g_n$ as defined by (2.7) we have

THEOREM 7. *If B and W are symmetric matrices of order n and $K_n(B, W)$ and $L_n(B, W)$ are the generalized Kloosterman sums defined by (5.1) and (5.2), then*

$$(9.9) \quad \sum_B |K_n(B, W)|^2 = \sum_B |L_n(B, W)|^2 = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} g_n,$$

where g_n is given by (2.7).

If we sum the products $K_n(B_1 + B, W_1) K_n(B_2 - B, W_2)$, $L_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2)$ and $K_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2)$ over all symmetric B of order n and rank r we get

THEOREM 8. *If B_1, B_2, W_1, W_2 are fixed symmetric matrices of order n , then*

$$(9.10) \quad \begin{cases} \sum_{\text{rank } B=r} K_n(B_1 + B, W_1) K_n(B_2 - B, W_2) \\ = \sum_{|E| \neq 0} \{H(I - E, r, 1) + H(I - E, r, -1)\} K_n(B_1 + EB_2, W_1 + E^{-1}W_2), \end{cases}$$

$$(9.11) \quad \begin{cases} \sum_{\text{rank } B=r} L_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2) \\ = \sum_{|E| \neq 0} \lambda(E) \{H(I - E, r, 1) + H(I - E, r, -1)\} K_n(B_1 + EB_2, W_1 + E^{-1}W_2), \end{cases}$$

$$(9.12) \quad \begin{cases} \sum_{\text{rank } B=r} K_n(B_1 + B, W_1) L_n(B_2 - B, W_2) \\ = \sum_{|E| \neq 0} \lambda(E) \{H(I - E, r, 1) + H(I - E, r, -1)\} L_n(B_1 - EB_2, W_1 + E^{-1}W_2), \end{cases}$$

where the sums are over all symmetric B of order n and rank r and all non-singular symmetric E of order n .

For, if B_1, B_2, W_1, W_2 and B are symmetric matrices of order n , then

$$\begin{aligned} & K_n(B_1 + B, W_1) K_n(B_2 - B, W_2) \\ &= \sum_{|C| \neq 0} \sum_{|D| \neq 0} e\{-\sigma(B_1 C + W_1 C^{-1} + B_2 D + W_2 D^{-1})\} e\{-\sigma(B(C - D))\}. \end{aligned}$$

If we put $D = CE$, where $|E| \neq 0$, and sum the above product over all B of rank r we can write

$$(9.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\text{rank } B=r} K_n(B_1 + B, W_1) K_n(B_2 - B, W_2) \\ &= \sum_{|C| \neq 0} \sum_{|E| \neq 0} e\{-\sigma(B_1 C + W_1 C^{-1} + B_2 C E + W_2 C^{-1} E^{-1})\} \times \\ & \quad \times \sum_{\text{rank } B=r} e\{-\sigma(BC(I - E))\}. \end{aligned} \right.$$

In view of the definition of $H(B, r, \lambda)$ in 5, the inner sum is equal to

$$H(I - E, r, 1) + H(I - E, r, -1),$$

so that using the definition of $K_n(B, W)$, (9.13) gives (9.10). The proofs of (9.11) and (9.12) are similar.

Two more relationships of this same sort are given by

THEOREM 9. *If B_1, B_2 and W are symmetric matrices of order n , then*

$$(9.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_B K_n(B_1 + B, W) \{H(B_2 - B, S, 1) + H(B_2 - B, s, -1)\} \\ &= \begin{cases} 0 & (s < n) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)} K_n(B_1 + B_2, W) & (s = n) \end{cases} \end{aligned} \right.$$

and

$$(9.15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_B L_n(B_1 + B, W) \{H(B_2 - B, s, 1) + H(B_2 - B, s, -1)\} \\ &= \begin{cases} 0 & (s < n) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)} L_n(B_1 + B_2, W) & (s = n), \end{cases} \end{aligned} \right.$$

where the sums are over all symmetric B of order n .

We remark that for $s = n$, in view of (5.3), (9.14) and (9.15) are (9.6) and (9.8) respectively, with $W_1 = W$ and $W_2 = 0$.

10. *Explicit values of $K_n(B, 0)$ and $L_n(B, 0)$.* The explicit values of

$$(10.1) \quad \begin{cases} S(B, z) = H(B, z, 1) + H(B, z, -1) \\ D(B, z) = H(B, z, 1) - H(B, z, -1) \end{cases}$$

are given in [4]. Since, by (5.3) and (5.4),

$$(10.2) \quad K_n(B, 0) = S(B, n) \quad \text{and} \quad L_n(B, 0) = D(B, n),$$

we are able to give explicit values for the Kloosterman sums (10.2). Using [4] we may state

THEOREM 10. If B is a symmetric matrix of order n and rank r , then the Kloosterman sum $K_n(B, 0)$ defined by (5.1) is equal to

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{1}{2}r} \lambda(B) \psi^{\frac{1}{2}r} (-1) q^{\frac{1}{2}r(2n-r-8)+4} \frac{\prod_{i=0}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ even}, r \text{ even}), \\ & (-1)^{\frac{1}{2}(r+1)} q^{\frac{1}{2}(r-1)(2n-r-7)} \frac{\prod_{i=0}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ odd}, r \text{ odd}), \\ & 0 \quad (n \text{ even}, r \text{ odd}), \\ & (-1)^{\frac{1}{2}r} q^{\frac{1}{2}(r-2)(2n-r-6)} \frac{\prod_{i=-1}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r+1)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ odd}, r \text{ even}), \end{aligned}$$

and the Kloosterman sum $L_n(B, 0)$ defined by (5.2) is equal to

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{1}{2}r} \psi^{\frac{1}{2}n} (-1) q^{\frac{1}{2}r(2n-r+2)-\frac{1}{2}t} \frac{\prod_{i=0}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ even}, r \text{ even}), \\ & (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)} \lambda(B) \psi^{\frac{1}{2}(n+r-2)} (-1) q^{\frac{1}{2}(r-1)(2n-r-1)+\frac{1}{2}(n+1)} \frac{\prod_{i=0}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ odd}, r \text{ odd}), \\ & (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)} \psi^{\frac{1}{2}n} (-1) q^{\frac{1}{2}(r-1)(2n-r+3)-\frac{1}{2}t} \frac{\prod_{i=-1}^{n-r-1} (1 - q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r+1)} (1 - q^{-2i})} \quad (n \text{ even}, r \text{ odd}), \\ & 0 \quad (n \text{ odd}, r \text{ even}). \end{aligned}$$

11. *Another weighted sum.* Finally we consider the sum

$$(11.1) \quad H^* = H^*(B, U, A, r, \lambda) = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} H(X'AX - B, r, \lambda),$$

where A is non-singular and symmetric of order m , B is symmetric of order t , U is an arbitrary $m \times t$ matrix, the summation is over all $m \times t$ matrices X , and $H(B, r, \lambda)$ is defined in § 5. The relationship between H^* and the sum S defined in (3.1) is given by

THEOREM 11. If $H^*(B, U, A, r, \lambda)$ is the sum defined by (11.1) and $S(B, U, A)$ is defined in (3.1), then

$$(11.2) \quad H^*(B, U, A, r, \lambda) = \sum_D H(D, r, \lambda) S(B + D, U, A),$$

where the summation is over all symmetric D of order t .

To prove Theorem 11 we use the definition of $H(B, r, \lambda)$ to write (11.1) as

$$(11.3) \quad H^* = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_{C(t, r, \lambda)} e\{-\sigma((X'AX - B)C)\}.$$

Using [3; equation (7.5)]

$$\sum_D H(D, r, \lambda) e\{\sigma(DC)\} = \begin{cases} 0 & (C \neq C(t, r, \lambda)) \\ q^{\frac{1}{2}t(t+1)} & (C = C(t, r, \lambda)), \end{cases}$$

where the summation is over all symmetric D of order t , (11.3) gives

$$(11.4) \quad \begin{cases} q^{\frac{1}{2}t(t+1)} H^* = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_C e\{-\sigma((X'AX - B)C)\} \sum_D H(D, r, \lambda) e\{\sigma(DC)\}, \\ \quad = \sum_D H(D, r, \lambda) \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_C e\{-\sigma((X'AX - B - D)C)\}, \end{cases}$$

where C and D run through all symmetric matrices of order t and X through all $m \times t$ matrices. By (2.6), the inner sum in (11.4) vanishes except for $X'AX = B + D$ when its value is $q^{\frac{1}{2}t(t+1)}$. Thus (11.4) reduces to

$$(11.5) \quad H^* = \sum_D H(D, r, \lambda) \sum_{X'AX=B+D} e\{\sigma(2U'X)\}.$$

Since $\sigma(2U'X) = \sigma(U'X + X'U)$, in view of the definition of the sum S , (11.5) gives (11.2).

We may show in similar fashion that

$$(11.6) \quad q^{\frac{1}{2}t(t+1)} S(B, U, A) = f_0(U) + \sum_{r=1}^t \{H^*(B, U, A, r, 1) + H^*(B, U, A, r, -1)\},$$

where $f_r(U)$ is defined by (7.8).

Using (11.2) we may prove the two formulas [compare with (11.2) using the definition of H^* in (11.1)]

$$(11.7) \quad \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} K_t(X'AX - B, 0) = \sum_D K_t(D, 0) S(B + D, U, A)$$

and

$$(11.8) \quad \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} L_t(X'AX - B, 0) = \sum_D L_t(D, 0) S(B + D, U, A),$$

where A is non-singular and symmetric of order t , B is symmetric of order t , U is an arbitrary $m \times t$ matrix, X runs through all $m \times t$ matrices, and D runs through all symmetric matrices of order t .

References

- [1] CARLITZ, L.: The singular series for sums of squares of polynomials. *Duke Math. J.* **14**, 1105—1120 (1947). — [2] CARLITZ, L.: Weighted quadratic partitions over a finite field. *Canad. J. Math.* **5**, 317—323 (1953). — [3] CARLITZ, L.: Representations by quadratic forms in a finite field. *Duke Math. J.* **21**, 123—138 (1954). — [4] HODGES, JOHN H.: Exponential sums for symmetric matrices in a finite field. *Math. Nachr.* 1956.

Dept. of Math., The University of Buffalo, Buffalo, N.Y. (USA)

(Eingegangen am 2. März 1956)

Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen

Von

KURT MAHLER

Bezeichnungen (für nähere Einzelheiten s. den Enzyklopädie-Artikel Nr. 27 von KELLER):

R_n ist der affine Raum aller Punkte oder Vektoren $X = (x_1, \dots, x_n)$ mit reellen $x_1, \dots, x_n$. Sind $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ irgend n linear-unabhängige Punkte in R_n , so bedeute $\{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\}$ ihre Determinante. Diese Punkte erzeugen ein Gitter $\mathcal{A}$, welches aus allen $u_1 X^{(1)} + \dots + u_n X^{(n)}$ mit ganzen $u_1, \dots, u_n$ besteht und die Determinante $d(\mathcal{A}) = |\{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\}|$ hat. Ist S eine beliebige Punktmenge in R_n , so heißt $\mathcal{A}$ S -zulässig falls, außer vielleicht dem Ursprung $O = (0, \dots, 0)$, kein Punkt von $\mathcal{A}$ innerer Punkt von S ist. Unter der Gitterdeterminante $\Delta(S)$ von S ist alsdann die untere Grenze von $d(\mathcal{A})$, erstreckt über alle S -zulässigen Gitter, verstanden. Ein S -zulässiges Gitter $\mathcal{A}$ mit $d(\mathcal{A}) = \Delta(S)$ heißt ein kritisches Gitter von S .

Die Punktmenge S ist ein Strahlenkörper, falls O innerer Punkt ist und falls ferner für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ auch tX zu S gehört. Ist für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ sogar tX ein innerer Punkt von S , so heißt S ein Sternkörper.

Sei $n \geq 2$, S ein beschränkter Sternkörper¹⁾ in R_n , und K ein S einbeschriebener konvexer Körper von größtmöglichem Inhalt $V(K)$. (Mit Hilfe des Satzes von BLASCHKE über Folgen konvexer Körper zeigt man leicht die Existenz eines solchen Körpers K .) Man kann die Frage aufwerfen, ob es eine nicht-triviale positive untere Schranke für $V(K)$ gibt, die allein von einem geeigneten Funktional von S abhängt.

Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Schranke für $V(K)$ nicht nur von dem Inhalt $V(S)$ von S abhängen kann. Denn sei z.B. S_r der endliche Sternkörper

$$S_r: |x_1 x_2 \dots x_n| \leq 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2,$$

welcher in dem unendlichen Sternkörper

$$S_\infty: |x_1 x_2 \dots x_n| \leq 1$$

enthalten ist. Es ist wohlbekannt, daß S_∞ zwar eine endliche Gitterdeterminante $\Delta(S_\infty)$ hat, daß aber sein Volumen $V(S_\infty)$ unendlich groß ist. Man kann daher ein $r \geq n$ so auswählen, daß

$$V(S_r) \text{ beliebig groß, aber } \frac{1}{2} \Delta(S_\infty) \leq \Delta(S_r) \leq \Delta(S_\infty)$$

¹⁾ Alle auftretenden konvexen Körper, Sternkörper und Strahlenkörper werden als symmetrisch in bezug auf den Ursprung $O = (0, \dots, 0)$ angenommen, es sei denn ausdrücklich das Gegenteil gesagt.

ist. Nun ist offenbar der konvexe Körper

$$K_0: |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq n$$

vom Inhalt

$$V(K_0) = \frac{(2n)^n}{n!}$$

eine Teilmenge von S_r und stellt zugleich den größten konvexen Körper dieser Art dar. Für diesen Körper kann $V(K_0)/V(S_r)$ beliebig klein gemacht werden; dagegen bleibt $V(K_0)/\Delta(S_r)$ für alle $r \geq n$ größer als eine gewisse, nur von n abhängige positive Zahl.

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß man auch im allgemeinen Falle $V(K)$ mit $\Delta(S)$ vergleichen muß und daß immer $V(K)/\Delta(S) \geq c$ ist, wo die Konstante $c > 0$ nur von n abhängt. Merkwürdigerweise ist diese Vermutung jedoch falsch und gilt das folgende Ergebnis:

Satz. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann gibt es einen beschränkten Sternkörper S in R_n mit der Eigenschaft $V(K) < \varepsilon \Delta(S)$ für jeden in S enthaltenen konvexen Körper K .

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird ein Strahlenkörper Σ^* konstruiert, welcher der Ungleichung

$$(a) \quad V(K) < \frac{\varepsilon}{2} \Delta(\Sigma^*)$$

für jeden konvexen Körper $K \subseteq \Sigma^*$ genügt. Danach wird in Σ^* ein Sternkörper S mit der Eigenschaft

$$(b) \quad \Delta(S) > \frac{1}{2} \Delta(\Sigma^*)$$

einbeschrieben. Da aus $K \subseteq S$ auch $K \subseteq \Sigma^*$ folgt, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folge von (a) und (b).

1. Der Mengenlehre entnehmen wir ohne Beweis den folgenden Hilfssatz:

Lemma 1. Es gibt eine unendliche Menge M reeller Zahlen, welche überall auf der reellen Achse dicht ist, derart, daß die Elemente jeder endlichen Teilmenge von M algebraisch unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen sind.

2. Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine beliebig kleine und mit $r > 1$ eine beliebig große Zahl, weiter mit

$$G_\varrho: |X| \leq \varrho \quad \text{und} \quad \Gamma_\varrho: |X| = \varrho$$

die Kugel vom Radius $\varrho > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung und ihre Oberfläche. Dabei bedeutet $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ die Länge des Ortsvektors $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Im Falle der Einheitskugel lassen wir den Index 1 weg und schreiben G und Γ anstatt G_1 und Γ_1 .

Durch jeden Punkt $X \neq O$ geht genau eine Gerade $L(X)$, welche den Ursprung enthält; sie besteht aus allen Punkten $P = tX$ mit reellem t . Diese Gerade schneidet Γ in zwei Punkten $+Q(X)$ und $-Q(X)$, die in bezug auf O

symmetrisch liegen. Die Bezeichnung kann eindeutig gemacht werden, indem man etwa für $+Q(X)$ den Punkt mit positivem t nimmt.

Aus Lemma 1 ergibt sich nun, daß man eine genügend große natürliche Zahl N und dazu N Punkte

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn}) \quad (h = 1, 2, \dots, N)$$

derart auswählen kann, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

(1) Die nN Koordinaten x_{hk} der Punkte X_h sind verschiedene Elemente der Menge M ; sie sind daher algebraisch unabhängig über dem rationalen Zahlkörper.

(2) Jeder Punkt von Γ hat eine Entfernung kleiner als δ von wenigstens einem der $2N$ Punkte

$$Q_h = +Q(X_h) \quad \text{und} \quad -Q_h = -Q(X_h) \quad (h = 1, 2, \dots, N)$$

auf Γ ²⁾.

Es bedeute jetzt Σ die Menge aller Punkte X der Kugel G_r , die nicht von der Form

$$X = \pm t Q_h \quad \text{mit} \quad 1 \leq t \leq r \quad (h = 1, 2, \dots, N)$$

sind; Σ entsteht also aus G_r , indem man $2N$ Strecken der Länge $r - 1$ fortläßt. Natürlich ist Σ kein Sternkörper; es ist jedoch ein Strahlenkörper. Denn wenn X zu Σ gehört, so gilt dasselbe für alle Punkte sX mit $-1 \leq s \leq +1$. Die Kugel G_ϱ ist für $\varrho < 1$, aber nicht für $\varrho \geq 1$ in Σ enthalten, und Σ liegt seinerseits in G_r .

3. Lemma 2. Es gibt eine Zahl $c_1 > 0$, die nur von n abhängt, so daß

$$V(K) < c_1 \max(1, \delta r^{n-1})$$

für jeden in Σ enthaltenen konvexen Körper K ist.

Beweis. Sei X_0 ein Punkt von K , für den $|X_0| = \xi > 0$ ein Maximum ist. Im Falle $\xi \leq 2$ gilt die Ungleichung

$$V(K) \leq V(G_2),$$

da alsdann $K \subseteq G_2$ ist. Sei von nun an

$$\xi > 2.$$

Eine Rotation des Koordinatensystems hat keinen Einfluß auf die Behauptung. Wir dürfen daher ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, daß X_0 die Koordinaten

$$X_0 = (0, 0, \dots, \xi)$$

hat.

²⁾ Zwei Punkte X und Y in R_n haben die Entfernung $|X - Y|$.

Weiter bedeute $\mathbf{K}$ den Durchschnitt von K mit der Koordinatenebene $x_n=0$; $\mathbf{K}$ ist also ein $(n-1)$ -dimensionaler konvexer Körper. Es gibt einen Punkt

$$\mathcal{E} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, 0)$$

auf der Begrenzung von $\mathbf{K}$ mit kleinster Entfernung

$$d = |\mathcal{E}| > 0$$

von O . Die $(n-1)$ -dimensionale Kugel

$$\kappa: |X| \leq d, \quad x_n = 0,$$

in der Ebene $x_n=0$ ist daher in $\mathbf{K}$ und so auch in K enthalten.

Wir konstruieren nun zwei Doppelkegel Φ und φ mit den Spitzen $+X_0$ und $-X_0$ bzw. über der Basis $\mathbf{K}$ und der Basis κ . Diese zwei Körper Φ und φ sind wieder symmetrisch in bezug auf O und konvex, und es ist offenbar $\varphi \subseteq \Phi \subseteq K$.

Wie schon erwähnt, ist G nicht in K , also auch nicht in φ enthalten. Da nun O innerhalb, X_0 aber außerhalb von G liegt, so enthält der Durchschnitt von φ mit dem Teil von Γ , der im Halbraum $x_n \geq 0$ liegt, eine größte Kugelkappe P mit Mittelpunkt im Punkte $X^* = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Diese Kugelkappe P besteht aus allen Punkten $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ auf Γ mit der Eigenschaft

$$\eta \leq x_n \leq 1;$$

dabei bedeutet η eine gewisse Zahl mit $0 \leq \eta < 1$. Daher kann P auch als die Menge aller Punkte X auf Γ mit

$$|X - X^*| \leq \sqrt{2(1-\eta)}$$

aufgefaßt werden. Andererseits liegt X^* von wenigstens einem der Punkte $\mp Q_k$ in einer Entfernung kleiner als δ , und kein Punkt $\mp Q_k$ kann zu P gehören. Daher muß

$$\sqrt{2(1-\eta)} < \delta, \quad \text{d.h.} \quad \eta > 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

sein.

Indem wir nun den Rand von P von dem Punkte X_0 aus auf die Ebene x_n projizieren, erhalten wir die Proportion

$$d : \sqrt{1-\eta^2} = \xi : (\xi - \eta).$$

Hier ist

$$\sqrt{1-\eta^2} < \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} < \delta \quad \text{und} \quad \xi > 2, \quad \eta \leq 1, \quad \xi - \eta > \frac{1}{2}\xi, \quad \frac{\xi}{\xi - \eta} < 2$$

und daher schließlich

$$d : \delta < 2 : 1, \quad d < 2\delta.$$

In den beiden Punkten Ξ und $-\Xi$ bringen wir nun ein Paar paralleler Stützebenen von K an. Diese Stützebenen begrenzen einen Parallelstreifen der Dicke

$$\leq |\Xi - (-\Xi)| = 2d < 4\delta,$$

in welchem K enthalten ist. Da andererseits K auch eine Teilmenge der Kugel G_r ist, so liegt K vollständig in einem Zylinder der Höhe 4δ und mit einem Querschnitt vom $(n-1)$ -dimensionalen Inhalt

$$c_2 r^{n-1},$$

c_2 bezeichnet hier den Inhalt der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitskugel. Also ergibt sich die Abschätzung

$$V(K) < 4\delta \cdot c_2 r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls

$$c_1 = \max(V(G_2), 4c_2)$$

gewählt wird.

4. Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges Σ -zulässiges n -dimensionales Gitter. Eine gewisse (möglicherweise verschwindende) Anzahl von primitiven Punkten dieses Gitters³⁾ liegt im Innern von G_r ; seien das genau die Punkte $\mp Y_1, \mp Y_2, \dots, \mp Y_p$. Die Vorzeichen lassen sich so wählen, daß es zu jedem dieser Gitterpunkte Y_h einen eindeutig bestimmten Index $j=j(h)$ gibt, derart daß

$$Y_h = s_h Q_j \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r$$

ist; denn Punkte nicht von dieser Form im Innern von G_r liegen auch im Innern von Σ . Verschiedenen Punkten Y_h und Y_k kann offenbar nicht derselbe Index j entsprechen. Es läßt sich daher die Bezeichnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit so umändern, daß gerade

$$Y_h = s_h Q_h \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

ist. Nach der Definition von Q_h läßt sich alsdann Y_h auch in der Form

$$(3) \quad Y_h = t_h X_h \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

darstellen, wo jetzt $t_1, t_2, \dots, t_p$ gewisse von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

5. Von den p Gitterpunkten $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ seien genau q linear unabhängig, etwa die Punkte $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$; dabei ist natürlich

$$q \leq \min(n, N, p).$$

³⁾ $Y \in \mathcal{A}$ heißt primitiv, falls $Y \neq O$ ist und es keinen Gitterpunkt der Form tY mit $0 < t < 1$ gibt.

Falls $q < p$ ist, lassen sich die $p - q$ übrigen Punkte $Y_{q+1}, Y_{q+2}, \dots, Y_p$ durch diese Basis in der Form

$$Y_h = \lambda_{h1} Y_1 + \lambda_{h2} Y_2 + \dots + \lambda_{hq} Y_q \quad (h = q+1, q+2, \dots, p)$$

ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten λ_{hk} gewisse rationale Zahlen, und wegen $Y_h \neq 0$ sind $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{hq}$ für keinen Index h alle gleichzeitig Null.

Aus (3) folgen nun die äquivalenten Beziehungen

$$t_h X_h = \lambda_{h1} t_1 X_1 + \lambda_{h2} t_2 X_2 + \dots + \lambda_{hq} t_q X_q \quad (h = q+1, q+2, \dots, p).$$

Nachdem hier die Koordinaten

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn})$$

eingesetzt worden sind, erhalten wir daher das System von $n(p - q)$ homogenen linearen Gleichungen

$$(4) \quad t_h x_{hk} = \lambda_{h1} t_1 x_{1k} + \lambda_{h2} t_2 x_{2k} + \dots + \lambda_{hq} t_q x_{qk} \quad \begin{matrix} (h = q+1, q+2, \dots, p) \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

für die p Größen $t_h \neq 0$.

Lemma 3. *Es ist entweder $q = p$ oder $q = p - 1$.*

Beweis. Sei die Behauptung falsch und daher $q \leq p - 2$, so daß die Gln. (4) wenigstens für $h = q + 1$ und $h = q + 2$ erfüllt sind. Keiner der hier auftretenden Koeffizienten

$$\lambda_{hk} \quad (h = q+1, q+2; k = 1, 2, \dots, n)$$

kann gleich Null sein. Denn sei etwa $1 \leq v < n$ und

$$\lambda_{q+1,k} \neq 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, v; \quad \lambda_{q+1,k} = 0 \quad \text{für } k = v+1, v+2, \dots, n.$$

Die $v+1$ aus (4) entspringenden Gleichungen

$$t_{q+1} x_{q+1,k} = \lambda_{q+1,1} t_1 x_{1k} + \lambda_{q+1,2} t_2 x_{2k} + \dots + \lambda_{q+1,v} t_v x_{vk} \quad (k = 1, 2, \dots, v+1)$$

für die nicht-verschwindenden Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_v, t_{q+1}$ verlangen, daß ihre Determinante

$$|x_{q+1,k}, \lambda_{q+1,1} x_{1k}, \lambda_{q+1,2} x_{2k}, \dots, \lambda_{q+1,v} x_{vk}|_{k=1,2,\dots,v+1}$$

gleich Null ist. Aber dann sind, gegen die Voraussetzung, nicht alle nN Koordinaten x_{hk} algebraisch unabhängig über dem rationalen Körper.

Für die Werte $h = q + 1$ und $h = q + 2$ erhalten wir also aus (4) ein System von $2n$ homogenen linearen Gleichungen für die $q+2$ Größen $t_1, t_2, \dots, t_{q+2}$, die wieder alle von Null verschieden sind. Wegen $n \geq 2$ und $q \leq n$ ist jedoch $2n \geq q+2$. Die Koeffizientenmatrix hat daher höchstens den Rang $q+1$, und es ergibt sich erneut der Widerspruch, daß die in ihr auftretenden Koordinaten x_{hk} einer nicht-trivialen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen.

6. Lemma 4. Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c_3 > 0$, derart, daß

$$\Delta(\Sigma) \geq c_3 r^{n-1}.$$

Beweis. Nach dem letzten Hilfssatz kann, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, höchstens eine Gleichung

$$\kappa_h Y_h + \kappa_k Y_k + \kappa_l Y_l = 0$$

mit von Null verschiedenen rationalen Koeffizienten gelten; dabei sind h, k, l irgend drei verschiedene der Indizes $1, 2, \dots, p$. Demnach ist für $h \neq k$ immer nur höchstens einer der beiden Gitterpunkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ zu einem weiteren Gitterpunkt Y proportional. Nach der Definition dieser Punkte bedeutet dies, daß höchstens einer der beiden Punkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ im Innern von G_r liegen kann. Anders ausgedrückt, es muß wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$|Y_h + Y_k| \geq r \quad \text{oder} \quad |Y_h - Y_k| \geq r$$

gelten.

Sei jetzt etwa

$$|Y_1| = \min(|Y_1|, |Y_2|, \dots, |Y_p|).$$

Es folgt dann für $h=2, 3, \dots, p$, daß

$$r \leq |Y_1 \pm Y_h| \leq |Y_1| + |Y_h| \leq 2|Y_h|, \quad |Y_h| \geq \frac{r}{2}.$$

Bedeute jetzt E das Rotationsellipsoid in R_n mit einer Halbachse der Länge 1 in der Richtung OY_1 , und mit $n-1$ Halbachsen der Länge $r/2$ in Richtungen senkrecht zu OE_1 . Das Innere von E enthält dann keinen der Punkte $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ und folglich überhaupt keinen von O verschiedenen Punkt von A ; d.h., A ist E -zulässig. Es ist also

$$\delta(A) \geq \Delta(E),$$

und da dies für jedes Σ -zulässige Gitter gilt, so ist auch

$$\Delta(\Sigma) \geq \Delta(E).$$

Das Ellipsoid E hat den Inhalt

$$V(E) = c_4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1},$$

wobei $c_4 = V(G)$ gesetzt wurde. Nach MINKOWSKIS Gitterpunktssatz ist andererseits

$$\Delta(E) \geq 2^{-n} V(E) = c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}.$$

Also erhalten wir die Ungleichung

$$\Delta(\Sigma) \geq c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls $c_3 = c_4 2^{-(2n-1)}$ gesetzt wird.

7. Aus Lemma 2 und 4 ergibt sich nun für jeden in Σ enthaltenen konvexen Körper K , daß

$$\frac{V(K)}{\Delta(\Sigma)} < \frac{c_1 \max(1, \delta r^{n-1})}{c_3 r^{n-1}} = \frac{c_1}{c_3} \max(r^{-(n-1)}, \delta)$$

ist. Genügen also δ und r den Bedingungen

$$\frac{c_1}{c_3} \delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{c_1}{c_3} r^{-(n-1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so folgt die Ungleichung

$$(5) \quad V(K) < \frac{\varepsilon}{2} \Delta(\Sigma).$$

Es ist jetzt zweckmäßig, Σ durch einen neuen Strahlenkörper Σ^* zu ersetzen; man erhält diesen, indem man zu Σ die $2N$ Punkte $\mp Q_1, \mp Q_2, \dots, \mp Q_N$ hinzufügt. Ein Σ -zulässiges Gitter ist offenbar auch Σ^* -zulässig, und umgekehrt; darum gilt

$$\Delta(\Sigma^*) = \Delta(\Sigma).$$

Ist ferner K^* irgendein Σ^* einbeschriebener konvexer Körper und liegt ein zweiter konvexer Körper K ganz im Innern von K^* , so ist K auch im Innern von Σ enthalten. Es folgt daher leicht, daß die Ungleichung (5) bestehenbleibt, falls in ihr Σ durch Σ^* ersetzt wird. Also erfüllt Σ^* die Forderung (a) der Einleitung.

8. Sei $\sigma > 0$ eine sehr kleine Zahl, und bedeute T_h die Menge aller Punkte X der Form

$$X = s Q_h + (s-1) \sigma Y, \text{ wo } s > 1 \text{ und } |Y| < 1$$

ist; T_h stellt also einen offenen Kegel mit der Spitze Q_h dar. Weiter sei $-T_h$ die zu T_h in bezug auf O symmetrische Menge. Endlich bezeichne S_σ die Menge, welche aus allen Punkten X der Form

$$|X| \leq r, X \notin \mp T_h \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \dots, N$$

besteht. Offenbar ist S_σ eine abgeschlossene Menge und ein Sternkörper.

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß $S_\sigma \subseteq \Sigma^*$ und für $\sigma < \tau$ auch $S_\sigma \supseteq S_\tau$ ist. Dies zieht für die Gitterdeterminante die Ungleichungen

$$\Delta(S_\tau) \leq \Delta(S_\sigma) \leq \Delta(\Sigma^*) \quad \text{für} \quad 0 < \sigma < \tau$$

nach sich. Wenn also σ gegen Null strebt, so wächst $\Delta(S_\sigma)$ monoton gegen einen Grenzwert, der nicht größer als $\Delta(\Sigma^*)$ sein kann.

In der Tat ist sogar

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \Delta(S_\sigma) = \Delta(\Sigma^*).$$

Denn für jede natürliche Zahl k können wir ein $S_{1/k}$ -zulässiges Gitter A_k so auswählen, daß

$$d(A_k) < \Delta(S_{1/k}) + \frac{1}{k}$$

ist. Die Gitterfolge $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ ist offenbar beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge $\{A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, \dots\}$, die etwa gegen das Gitter A_0 strebt. Dieses Gitter A_0 ist nun Σ^* -zulässig. Denn andernfalls gibt es in Σ^* einen inneren Punkt $Z_0 \neq 0$ mit $Z_0 \in A_0$. Alsdann besitzt A_{k_i} für alle genügend großen i einen Punkt in einer festen, beliebig kleinen Umgebung von Z_0 . Dieser Punkt ist offenbar ein innerer, von O verschiedener Punkt von S_{1/k_i} , so daß sich ein Widerspruch ergibt.

Da somit $\Delta(S_\sigma)$ gegen $\Delta(\Sigma^*)$ strebt, so gibt es einen Wert $\sigma = \sigma_0$, derart, daß

$$\Delta(S_{\sigma_0}) < \frac{1}{2} \Delta(\Sigma^*)$$

ist. Der Sternkörper $S = S_{\sigma_0}$ erfüllt also die in der Einleitung gestellte Bedingung (b).

Mathematics Department, The University, Manchester, England

(Eingegangen am 8. März 1956)

Äquivalenzsätze für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie

Von

GERHARD FAULHABER

Einleitung

Die Folge s_n ($n=0, 1, \dots$) heißt durch das T_α -Verfahren (TAYLOR-Verfahren der Ordnung α zur Limitierung von Folgen) limitierbar zum Wert s , wenn die Summen

$$T_\alpha s = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} s_\nu \quad (n = 0, 1, \dots)$$

existieren und gegen s streben für $n \rightarrow \infty$ (vgl. z.B. [5]). Wir beschränken uns auf den Fall $0 < \alpha < 1$; für solche α ist T_α permanent.

Die (in jedem endlichen Intervall $0 \leq t \leq t_0$ R -integrierbare) Funktion $s(t)$ heißt durch das T'_b -Verfahren (TAYLOR-Verfahren der Ordnung b zur Limitierung von Funktionen) limitierbar zum Wert s , wenn die Integrale

$$T'_b s = \frac{b^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-bt} s(t) dt \quad (n = 0, 1, \dots)$$

existieren und gegen s streben für $n \rightarrow \infty$ (vgl. [6]). Wir beschränken uns auf $b > 0$; für solche b ist T'_b permanent.

Nun läßt sich das T'_b -Verfahren in naheliegender Weise auch zur Limitierung von Folgen nutzbar machen: Die Aussage

$$T'_b\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{sei gleichbedeutend mit} \quad T'_b\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s,$$

wobei $s(t)$ die zu den s_n gehörige Treppenfunktion ist ($s(t) = s_n$ für $n \leq t < n+1$). Es erhebt sich damit die Frage, in welchem Verhältnis bei einer vorgelegten Folge s_n die beiden Aussagen

$$T_\alpha\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{und} \quad T'_b\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

zueinander stehen. Untersucht man das asymptotische Verhalten der Elemente in den Matrizen T_α und T'_b , so läßt sich ein engerer Zusammenhang von T_α mit T'_b für $b = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ($b > 0$; $0 < \alpha < 1$) vermuten. In der Tat ließe

sich auch unter Verwendung bekannter Hilfsmittel (vgl. [1], Kap. IX; [5], § 5) beweisen: Ist $s_n = o(\sqrt[n]{n})$, so ist

$$(1) \quad T_\alpha\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{äquivalent} \quad T'_b\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{für} \quad b = \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Unsere Absicht ist jedoch, diese Äquivalenzaussage gleich für eine umfangreichere Folgenklasse zu gewinnen, nämlich für Folgen endlicher Ordnung. Dabei soll s_n von endlicher Ordnung heißen, wenn es ein $\sigma \geq 0$ gibt, so daß $s_n = O(n^\sigma)$ ist für $n \rightarrow \infty$ [analog bei Funktionen $s(t)$].

Wir knüpfen an den Satz an, daß die Verfahren B (BOREL) und $T_{\frac{1}{2}}$ äquivalent sind für Folgen $s_n = o(\sqrt[n]{n})$. Dies wurde, in Verfolgung einer von M. RIESZ geäußerten Vermutung, von HARDY und LITTLEWOOD [2] bewiesen. J. M. HYSLOP [4] hat weiter gezeigt, daß B äquivalent ist mit einem Verfahren $F_{\frac{1}{2}}$ (s. unten; in [4] ist $F_{\frac{1}{2}}$ mit $(V, \frac{1}{2})$ bezeichnet), und zwar schon dann, wenn s_n von endlicher Ordnung ist. Es erhebt sich die Frage, ob auch $F_{\frac{1}{2}}$ und $T_{\frac{1}{2}}$, und damit B und $T_{\frac{1}{2}}$, äquivalent sind für Folgen endlicher Ordnung. Durch Ausbau der HYSLOPSchen Beweismethode werden wir zu einer bejahenden Antwort gelangen. Gleichzeitig haben wir damit die notwendigen Hilfsmittel an der Hand, um die Äquivalenzaussage (1) in der beabsichtigten Richtung zu erweitern, nämlich für alle Folgen endlicher Ordnung zu beweisen. Schließlich lassen sich auf diese Weise noch gewisse Äquivalenzaussagen zwischen den Verfahren E_p (EULER-KNOPP) und S_p einerseits und den Verfahren T_α andererseits, die bisher unter der Voraussetzung $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ bekannt waren (vgl. MEYER-KÖNIG [5], S. 297; für den E_p -Teil vgl. HARDY [1], Kap. IX), ebenfalls auf Folgen endlicher Ordnung ausdehnen. Eine knappe Andeutung einiger dieser Sätze findet sich schon bei HARDY ([1], S. 219 unten bis S. 220 oben).

Nach einem Vorschlag von Herrn MEYER-KÖNIG bezeichnen wir (vgl. Titel der Arbeit) die ganze Klasse der Verfahren E_p, B, S_p, T_α und T'_b , auf die sich unsere Äquivalenzsätze beziehen, als die Klasse der Kreisverfahren, indem wir damit die von HARDY und LITTLEWOOD ursprünglich für das T_α -Verfahren gewählte Bezeichnung „circle method“ auf die genannte Klasse ausdehnen. Diese Ausdehnung erscheint berechtigt, wenn man bedenkt, daß die Limitierbarkeit einer Folge bzw. Funktion nach irgendeinem dieser Verfahren jeweils bedeutet, daß eine gewisse TAYLOR-Entwicklung (bzw., bei B , ein LAPLACE-Integral) für einen gewissen Wert der Variablen konvergiert.

§ 1. Hilfssätze

Es seien zunächst einige Hilfssätze zusammengestellt. Sie bilden (soweit es sich um Abschätzungen von unendlichen Reihen handelt) leichte Verallgemeinerungen von Sätzen, für die HYSLOP in [3] und [4] Beweise gegeben hat. Diese Beweise lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf die folgenden Aussagen übertragen und werden daher nicht ausgeführt.

Hilfssatz 1. Ist $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ und $a > 0$, so gilt für $\zeta > \frac{1}{2}$

$$\sum_{v \geq x+x^{\frac{1}{2}}} (v-x)^{\varrho} v^{\sigma} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty),$$

und für $\frac{1}{2} < \zeta < 1$

$$\sum_{0 \leq v \leq x-x^{\frac{1}{2}}} (x-v)^{\varrho} v^{\sigma} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hilfssatz 1'. Ist $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ und $a > 0$, so gilt für $\zeta > \frac{1}{2}$

$$\int_{x+x^{\frac{1}{2}}}^{\infty} (t-x)^{\varrho} t^{\sigma} e^{-a \frac{(t-x)^2}{x}} dt = o(1) \quad (x \rightarrow \infty),$$

und für $\frac{1}{2} < \zeta < 1$

$$\int_0^{x-x^{\frac{1}{2}}} (x-t)^{\varrho} t^{\sigma} e^{-a \frac{(t-x)^2}{x}} dt = o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hilfssatz 1' entsteht formal aus Hilfssatz 1, indem man die Reihe über v durch ein Integral über t ersetzt. So steht im folgenden jedem Hilfssatz über Reihen ein Hilfssatz über Integrale gegenüber. Dabei entspricht der (komplexen) Folge s_n ($n=0, 1, \dots$) im Falle der Integrale eine (komplexwertige) Funktion $s(t)$ der reellen Veränderlichen t , die für $t \geq 0$ definiert und für jedes $t_0 > 0$ in $0 \leq t \leq t_0$ R -integrierbar ist. Für solche Funktionen schreiben wir kurz $s(t) \in \mathfrak{S}$. Für $s_n = o(n^{\sigma})$ ($\sigma \geq 0$) steht im entsprechenden Integralsatz $s(t) = o(t^{\sigma})$. Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir nur die Hilfssätze für Reihen auf und beziehen uns später, wenn wir einen entsprechenden Hilfssatz für Integrale benötigen, auf den zuständigen Satz für Reihen.

Hilfssatz 2. Ist $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ und $a > 0$, so gilt

$$\sum_{v=0}^{\infty} |v-x|^{\varrho} v^{\sigma} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} = O(x^{\sigma+\frac{1}{2}(\varrho+1)}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hilfssatz 3. Es sei $s_v = o(v^{\sigma})$ für ein $\sigma \geq 0$, ferner $q \geq 0$. Ist dann für $a > 0$

$$\sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} s_v = o(x^{\frac{1}{2}+q}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

so folgt für jedes ganze $\varrho \geq 0$ und für jedes $\eta > 0$

$$\sum_{v=0}^{\infty} (v-x)^{\varrho} s_v e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} = o(x^{\frac{1}{2}(\varrho+1)+q+\eta}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hilfssatz 4. Es sei $s_v = o(v^{\sigma})$ für ein $\sigma \geq 0$, ferner sei $q \geq 0$. Dann folgt aus

$$\sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} s_v = o(n^{\frac{1}{2}+q}) \quad (n=1, 2, \dots; n \rightarrow \infty)$$

die Beziehung

$$\sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} s_v = o(x^{\frac{1}{2}+q}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Bezeichnet man die (permanenten) Verfahren, die durch die Matrizen

$$a_{nv} = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} \quad (n > 0, v \geq 0, \text{ ganz}; a > 0),$$

$$a_{xv} = \sqrt{\frac{a}{\pi x}} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} \quad (x > 0; v = 0, 1, \dots; a > 0),$$

$$a_{nt} = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} \quad (n = 1, 2, \dots; t \geq 0; a > 0),$$

$$a_{xt} = \sqrt{\frac{a}{\pi x}} e^{-a \frac{(t-x)^2}{x}} \quad (x > 0; t \geq 0; a > 0)$$

definiert sind, als F_a^- , bzw. $F_a'^-$, bzw. J_a^- , bzw. $J_a'^-$ -Verfahren¹⁾, so ergeben sich aus Hilfssatz 4 und dem entsprechenden Hilfssatz für Integrale die beiden folgenden Äquivalenzsätze.

Satz I. Für jedes $a > 0$ ist das F_a^- -Verfahren für Folgen endlicher Ordnung äquivalent mit dem $F_a'^-$ -Verfahren.

Satz I'. Für jedes $a > 0$ ist das J_a^- -Verfahren für Funktionen endlicher Ordnung aus der Klasse $\mathfrak{S}$ äquivalent mit dem $J_a'^-$ -Verfahren.

§ 2. Die Matrizen E_p , S_β , T_α und T_b'

Die E_p -Verfahren (EULER-KNOPPSchen Verfahren) sind durch die Matrix

$$E_p = \frac{1}{2^{p n}} \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz}; p > 0),$$

die S_β -Verfahren durch

$$S_\beta = (1 - \beta)^{n+1} \binom{n+v}{v} \beta^v \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz}; 0 < \beta < 1),$$

das B -Verfahren (BORELSches Verfahren) durch

$$B = e^{-x} \frac{x^v}{v!} \quad (v \geq 0, \text{ ganz}; x \geq 0),$$

und die T_α -Verfahren (TAYLOR-Verfahren) durch

$$T_\alpha = (1 - \alpha)^{n+1} \binom{v}{n} \alpha^{v-n} \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz}; 0 < \alpha < 1)$$

gegeben. Die Matrizen dieser Verfahren lassen sich in eine einheitliche Form bringen, deren Hauptteil der F_a^- -Matrix gleich ist. Die F_a^- -Verfahren können so als Bindeglieder zwischen den Verfahren E_p , S_β , B und T_α aufgefaßt werden. Aber auch zur Untersuchung der Äquivalenz der T_α -Verfahren mit den $T_b'^-$ -Verfahren werden wir die F_a^- -Matrix heranziehen.

Zunächst bringen wir die Verfahren E_p , S_β , T_α in die besagte Form. Das B -Verfahren lassen wir beiseite; es wurde bereits von HYSLOP [4] behandelt.

¹⁾ F_a^- ist die in [1] mit (e, a) bezeichnete Matrix.

Hilfssatz 5. Die Verfahren E_p , S_β und T_α erfüllen folgende Voraussetzung $V=V(a, \lambda)$ für die Matrix A . Die Matrix $A=a_{nv}$ ($n, v=0, 1, \dots$) ist permanent. Es gibt positive Konstanten λ und a , so daß für $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$ folgendes richtig ist:

Für die positiven ganzen Zahlen n und m mit $m=\lambda n+\vartheta$ und $0 \leq \vartheta < \text{Max}(1, \lambda)$ ist bei $m-m^\zeta \leq v \leq m+m^\zeta$ (v ganz) und für jedes ganze $k \geq 1$

$$(2.1) \quad a_{nv} = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-a \frac{(v-m)^2}{m} + g_k + R_k}.$$

Dabei hat g_k die Form

$$(2.2) \quad g_k = \sum' l_{ij} \frac{(v-m)^j}{m^i} \quad (\text{zu summieren über } 1 \leq i \leq 2k-1, 0 \leq j \leq i+1),$$

wobei die l_{ij} von v unabhängige Größen sind, die für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in ϑ beschränkt bleiben²⁾. Der Strich an der Summe besagt, daß der Koeffizient $l_{12}=0$ ist. Für R_k gilt gleichmäßig in ϑ

$$(2.3) \quad R_k = O\left(\frac{|v-m|^{2k+1} + 1}{m^{2k}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ferner ist gleichmäßig in ϑ

$$(2.4) \quad \sum_{0 \leq v \leq m-m^\zeta} a_{nv} s_v = o(1), \quad \sum_{m+m^\zeta \leq v} a_{nv} s_v = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

sofern s_v von endlicher Ordnung ist.

Wir beweisen diesen Satz für die E_p -Matrix. Für die S_β -, bzw. T_α -Matrix geben wir nur die Ergebnisse an.

Es ist

$$\begin{aligned} E_p &= a_{nv} = \frac{1}{2^p n} \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} \\ &= \frac{1}{(q+1)^n} \binom{n}{v} q^{n-v} \quad \text{mit } p > 0 \text{ bzw. } q = 2^p - 1 > 0 \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz}). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\lambda = \frac{1}{q+1} = \frac{1}{2^p} \quad \text{und} \quad a = \frac{q+1}{2q} = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}$$

und zeigen, daß mit diesen Zahlen die Darstellung (2.1) möglich ist. Da hier $\lambda < 1$ ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl n genau ein ϑ mit $0 \leq \vartheta < 1$, so daß $n\lambda + \vartheta$ eine natürliche Zahl ist. Wir setzen $m = n\lambda + \vartheta$ und $v = m + h$ (≥ 0), wobei wir uns auf Werte h mit $|h| \leq m^\zeta$ beschränken. Dann ist

$$\log a_{n, m+h} = -n \log(q+1) + \log \binom{n}{m+h} + (n-m-h) \log q.$$

²⁾ Gleichmäßigkeit in ϑ wird nur in den Fällen benötigt, in denen ϑ durch n nicht eindeutig bestimmt ist, d.h. für $\lambda > 1$.

Mit Hilfe der STIRLINGSchen Formel

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \\ + \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} n^{-2r+1} + O(n^{-2k-1}) \quad (k \geq 1, \text{ ganz})$$

($B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...) erhält man

$$\log \binom{n}{m+h} = -\log \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - \left(m+h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{h}{m}\right) - \\ - \left(m+h + \frac{1}{2}\right) \log m - \left(n-m-h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{h}{n-m}\right) - \\ - \left(n-m-h + \frac{1}{2}\right) \log(n-m) + \\ + \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} \left\{ \frac{1}{n^{2r-1}} - \frac{1}{(m+h)^{2r-1}} - \frac{1}{(n-m-h)^{2r-1}} \right\} + \\ + O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right).$$

Die beiden letzten O -Beziehungen gelten für alle h mit $|h| \leq m^\varepsilon$ für $n \rightarrow \infty$.
Damit wird

$$\log a_{n,m+h} = \left\{ -\log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \log m + \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{2} \log(n-m) \right\} + \\ + \left\{ n \log \frac{n}{m(q+1)} - (n-m-h) \log \frac{n-m}{qm} \right\} + \\ + \left\{ -\left(m+h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{h}{m}\right) - \left(n-m-h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{h}{n-m}\right) \right\} + \\ + \left\{ \sum_{r=1}^k \dots + O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right) \right\}.$$

Der Klammersetzung entsprechend nennen wir die vier Summanden rechts S_1 , S_2 , S_3 und S_4 . Bei Anwendung der Beziehungen

$$(2.5) \quad \log(1+x) = \sum_{v=1}^s \frac{(-1)^{v-1}}{v} x^v + (-1)^s \vartheta_1 \frac{x^{s+1}}{1+x} \quad (-1 < x \leq 0; 0 < \vartheta_1 < 1)$$

und

$$(2.6) \quad \log(1+x) = \sum_{v=1}^s \frac{(-1)^{v-1}}{v} x^v + (-1)^s \vartheta_2 \frac{x^{s+1}}{s+1} \quad (0 \leq x \leq 1; 0 < \vartheta_2 < 1)$$

folgt

$$S_1 = \log \sqrt{\frac{1}{2\pi m(1-\lambda)}} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2k-1} \left(\frac{\vartheta}{1-\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{r m^r} + O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right).$$

Wegen $\frac{m}{n} \rightarrow \lambda$ für $n \rightarrow \infty$ ist $a_r = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{1-\lambda} \frac{m}{n} \right)^r$ für jedes r beschränkt für $n \rightarrow \infty$. Weiter gilt

$$O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k}} \left(\frac{m}{n}\right)^{2k}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

also, wegen $\frac{1}{2(1-\lambda)} = a$,

$$S_1 = \log \sqrt{\frac{a}{\pi m}} + \sum_{r=1}^{2k-1} a_r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right).$$

Für S_2 kann zunächst geschrieben werden

$$S_2 = -n \log \left(1 - \frac{\partial(q+1)}{q} \frac{1}{n}\right) + (m+h) \left[\log \left(1 - \frac{\partial}{1-\lambda} \frac{1}{n}\right) - \log \left(1 + \frac{\partial}{\lambda} \frac{1}{n}\right) \right],$$

und bei Verwendung von (2.5) und (2.6)

$$\begin{aligned} S_2 = & m \binom{n}{m} \sum_{r=1}^{2k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(q+1)}{q} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} - m \sum_{r=1}^{2k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{1-\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} - \\ & - m \sum_{r=1}^{2k} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \left(\frac{\partial}{\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} - h \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{1-\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} - \\ & - h \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \left(\frac{\partial}{\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right) + O\left(\frac{h}{m^{2k}}\right)^3. \end{aligned}$$

Die drei Glieder, die man für $r=1$ aus den drei ersten Summen (Σ) erhält, ergeben insgesamt $-\frac{\partial^2}{\lambda(1-\lambda)} \frac{m}{n} \frac{1}{m}$. Faßt man die Glieder mit $\frac{1}{m^r}$ bzw. $\frac{h}{m^r}$ zusammen, so folgt

$$S_2 = \sum_{r=1}^{2k-1} b_r \frac{1}{m^r} + h \sum_{r=1}^{2k-1} \bar{b}_r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{|h|+1}{m^{2k}}\right)$$

mit für $n \rightarrow \infty$ beschränkten, von h unabhängigen Koeffizienten b_r und $\bar{b}_r$. Die O -Beziehung gilt für alle h mit $|h| \leq m^{\frac{1}{2}}$.

Um S_3 umzuformen benützt man die Formeln (2.5) und (2.6) und setzt $\sigma_r = \left(\frac{m}{n-m}\right)^r$. Dann wird

$$\begin{aligned} S_3 = & - \sum_{r=1}^{2k} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{h^r}{m^{r-1}} - \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{h^{r+1}}{m^r} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{h^r}{m^r} + \\ & + \frac{n-m}{m} \sum_{r=1}^{2k} \frac{1}{r} \frac{h^r}{m^{r-1}} \sigma_r - \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{1}{r} \frac{h^{r+1}}{m^r} \sigma_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2k-1} \frac{1}{r} \frac{h^r}{m^r} \sigma_r + O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right) \end{aligned}$$

³⁾ Tritt in einem O - oder o -Glieder im Zähler h^{ν} ($\nu \geq 1$) allein auf, so ist für $h=0$ das O - bzw. o -Glieder durch null zu ersetzen.

und nach Einführung geeigneter Abkürzungen

$$S_3 = -\frac{h^2}{2m} \left(1 + \frac{m}{n-m}\right) + \sum_{r=2}^{2k-1} c_r \frac{h^{r+1}}{m^r} + \sum_{r=1}^{2k-1} \bar{c}_r \frac{h^r}{m^r} + O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right).$$

Das erste Glied dieser Darstellung ergibt

$$1 + \frac{m}{n-m} = \frac{1}{1-\lambda} \left[\sum_{r=0}^{2k-2} \left(\frac{\vartheta}{1-\lambda} \frac{m}{n} \right)^r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{1}{m^{2k-1}}\right) \right].$$

Da $\frac{1}{1-\lambda} = 2a$ ist, so folgt

$$S_3 = -a \frac{h^2}{m} + \sum_{r=2}^{2k-1} c_r \frac{h^{r+1}}{m^r} + \sum_{r=1}^{2k-1} \bar{c}_r \frac{h^r}{m^r} + h^2 \sum_{r=2}^{2k-1} \bar{\bar{c}}_r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right).$$

Auch hier sind die Koeffizienten von h unabhängig und für $n \rightarrow \infty$ beschränkt.

Es muß noch S_4 passend umgeschrieben werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} \frac{1}{n^{2r-1}} &= \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} \left(\frac{m}{n}\right)^{2r-1} \frac{1}{m^{2r-1}} = \sum_{r=1}^k \frac{d_r}{m^{2r-1}}, \\ \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} \frac{1}{m^{2r-1} \left(1 + \frac{h}{m}\right)^{2r-1}} &= \sum_{r=1}^k \sum_{\mu=0}^{2k-2r} \bar{d}_{r\mu} \frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}} + O\left(\frac{h^{2k-1}}{m^{2k}}\right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k \frac{B_{2r}}{(2r-1)2r} \frac{1}{m^{2r-1} \left(1 - \frac{h}{m} \frac{m}{n-m}\right)^{2r-1}} \left(\frac{m}{n-m}\right)^{2r-1} \\ = \sum_{r=1}^k \sum_{\mu=0}^{2k-2r} \bar{\bar{d}}_{r\mu} \frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}} + O\left(\frac{h^{2k-1}}{m^{2k}}\right), \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten d_r , $\bar{d}_{r\mu}$ und $\bar{\bar{d}}_{r\mu}$ von h unabhängig und für $n \rightarrow \infty$ beschränkt sind. Weiter ist

$$O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right), \quad O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k+1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{m}\right)^{2k+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right)$$

und schließlich

$$O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k+1}} \frac{1}{\left(\frac{n-m}{m} - \frac{h}{m}\right)^{2k+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right)$$

gleichmäßig in h , da $|h| \leq m^\zeta$, $\frac{n-m}{m} \rightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} \neq 0$ und $\frac{h}{m} \rightarrow 0$, gleichmäßig in h . Es ist also

$$S_4 = \sum_{r=1}^k d_r \frac{1}{m^{2r-1}} - \sum_{r=1}^k \sum_{\mu=0}^{2k-2r} (\bar{d}_{r\mu} + \bar{\bar{d}}_{r\mu}) \frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}} + O\left(|h| \frac{h^{2k+1} + 1}{m^{2k}}\right).$$

Fassen wir S_1 , S_2 , S_3 und S_4 zusammen, so erkennt man (2.1).

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Reihenreste (2.4) den angegebenen Abschätzungen genügen. Zunächst folgt aus

$$\frac{a_{nv}}{a_{n, v-1}} = \frac{n-v+1}{qv},$$

daß die Folge $\alpha_v = a_{nv}$ (n fest) für $0 \leq v \leq \frac{n+1}{q+1} = (n+1)\lambda$ monoton steigt und für $\lambda(n+1) \leq v \leq n$ monoton fällt. Für jedes $\omega > 0$ gilt $m - n\omega < m - m^\zeta$ für genügend großes n , d.h. das Glied $a_{n, m-[m^\zeta]}$ ⁴⁾ läßt sich nach [5] S. 291 in die Form

$$a_{n, m-[m^\zeta]} = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-a \frac{[m^\zeta]^2}{m} + \frac{[m^\zeta]}{m} O(1) + \frac{[m^\zeta]^3}{m^2} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]$$

bringen. Wenn man nun in $\sum_{0 \leq v \leq m-m^\zeta} a_{nv} s_v$ die Größen s_v durch $o(n^\sigma)$, die a_{nv} durch $a_{n, m-[m^\zeta]}$ und die Anzahl der Glieder durch n abschätzt, so erhält man

$$\sum_{0 \leq v \leq m-m^\zeta} a_{nv} s_v = O\left(n^{\sigma+1} m^{-\frac{1}{2}} e^{-a \frac{[m^\zeta]^2}{m} + \frac{[m^\zeta]}{m} O(1) + \frac{[m^\zeta]^3}{m^2} O(1)}\right),$$

oder, da $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$ und $\frac{n}{m} = O(1)$ ist,

$$\sum_{0 \leq v \leq m-m^\zeta} a_{nv} s_v = O\left(m^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-a m^{2\zeta-1}}\right) = o(1).$$

Die zweite Summe (2.4) wird analog abgeschätzt.

Damit ist gezeigt, daß das E_p -Verfahren der Voraussetzung V genügt. Ähnlich wie E_p lassen sich die Matrizen T_α und S_β behandeln. Die Matrix T_α erfüllt die Voraussetzung V mit $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ und $a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$, und die Matrix S_β mit $\lambda = \frac{\beta}{1-\beta}$ und $a = \frac{1-\beta}{2}$.

Für die Integralverfahren T'_b gilt analog

Hilfssatz 6. Die T'_b -Verfahren erfüllen die Voraussetzung $V'(a, \lambda)$ für die Matrix A' . Die Matrix $A' = a_n(t)$ ($n=0, 1, \dots; t \geq 0$) ist permanent. Es gibt positive Konstanten λ und a , so daß für $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$ folgendes richtig ist:

Für die positiven ganzen Zahlen n und m mit $m = \lambda n + \vartheta$ und $0 \leq \vartheta < \text{Max}(1, \lambda)$ ist bei $m - m^\zeta \leq t \leq m + m^\zeta$ und für jedes ganze $k \geq 1$

$$(2.7) \quad a_n(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-a \frac{(t-m)^2}{m} + g_k + R_k},$$

g_k hat die Form

$$(2.8) \quad g_k = \sum' l_{ij} \frac{(t-m)^j}{m^i} \quad (\text{zu summieren über } 1 \leq i \leq 2k-1, 0 \leq j \leq i+1),$$

⁴⁾ $[m^\zeta]$ steht, wie üblich, für die größte ganze Zahl $\leq m^\zeta$.

wobei die l_{ij} von t unabhängige Größen sind, die für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in ϑ^5 beschränkt sind. Der Strich an der Summe besagt, daß der Koeffizient $l_{12}=0$ ist. Für R_k gilt gleichmäßig in ϑ

$$(2.9) \quad R_k = O\left(\frac{|t-m|^{2k+1}+1}{m^{2k}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ferner ist gleichmäßig in ϑ

$$(2.10) \quad \int_0^{m-m^\zeta} a_n(t) s(t) dt = o(1), \quad \int_{m+m^\zeta}^{\infty} a_n(t) s(t) dt = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

sofern $s(t) \in \mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung ist.

Das T'_b -Verfahren erfüllt die Voraussetzung $V'(a, \lambda)$ mit $a = \frac{b}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{b}$. Der Beweis für (2.7) verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Teiles von Hilfssatz 5 und sei hier unterdrückt.

Beim Beweis von (2.10) beschränken wir uns auf die zweite Beziehung. Zunächst ist für $\lambda' > \lambda = \frac{1}{b}$ und $s(t) = o(t^\sigma)$

$$(2.11) \quad \frac{b^{n+1}}{n!} \int_{m+m^\zeta}^{\infty} t^{n+\sigma} e^{-bt} s(t) dt = o\left(\frac{b^{n+1}}{n!} \int_{m+m^\zeta}^{\infty} t^{n+\sigma} e^{-bt} dt\right) = o\left(\frac{b^{n+1}}{n!} \int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} + \frac{b^{n+1}}{n!} \int_{\lambda' n}^{\infty}\right).$$

Aus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{b^{n+1}}{n!} t^{n+\sigma} e^{-bt} \right) = \frac{b^{n+1}}{n!} e^{-bt} t^{n+\sigma-1} [n + \sigma - bt]$$

erkennt man, daß für $t > \frac{n+\sigma}{b} = \lambda n + \lambda \sigma$, also auch für $t \geq m + m^\zeta > \lambda n + \lambda \sigma$, wenn nur n genügend groß ist, der Integrand monoton fällt. Nach (2.7) können wir also folgende Abschätzung anschreiben:

$$\frac{b^{n+1}}{n!} \int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} t^{n+\sigma} e^{-bt} dt = O\left(\lambda' n m^{-\frac{1}{2}} (\lambda' n)^\sigma e^{-\frac{b}{2} m^{2\zeta-1} + g_1 + R_1}\right)$$

mit

$$g_1 = l_{10} \frac{1}{m} + l_{11} \frac{m^\zeta}{m} = o(1), \quad R_1 = O\left(\frac{m^{2\zeta} + 1}{m^2}\right) = o(1)$$

nach (2.8) und (2.9). Damit wird

$$\frac{b^{n+1}}{n!} \int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} t^{n+\sigma} e^{-bt} dt = O\left(m^{\sigma + \frac{1}{2}} e^{-\frac{b}{2} m^{2\zeta-1}}\right) = o(1).$$

Um das zweite Integral in (2.11) abzuschätzen, sei ein γ so gewählt, daß $0 < \gamma < b - \frac{1}{\lambda'}$ gilt. Dann ist für $t > \lambda' n$, wenn nur n genügend groß ist,

$$\left(\frac{t}{\lambda' n}\right)^{n+\sigma} e^{-bt+b\lambda' n} < e^{-\gamma t + \gamma \lambda' n}.$$

⁵⁾ Vgl. Fußnote 2).

Damit wird für große n

$$\frac{b^{n+1}}{n!} \int_{\lambda' n}^{\infty} t^{n+\sigma} e^{-bt} dt < \frac{b^{n+1}}{n!} (n \lambda')^{n+\sigma} e^{-b \lambda' n} \int_{\lambda' n}^{\infty} e^{-\gamma t + \gamma \lambda' n} dt = \frac{1}{\gamma} \frac{b^{n+1}}{n!} (n \lambda')^{n+\sigma} e^{-b \lambda' n}$$

und mit

$$n! = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{\vartheta_n}{4n}} \quad (n = 1, 2, \dots; 0 \leq \vartheta_n \leq 1)$$

wird der letzte Ausdruck

$$= O((b \lambda')^n n^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{n-b \lambda' n}) = O(e^{n(1+\log b \lambda' - b \lambda')} n^{\sigma-\frac{1}{2}}).$$

Aus $b \lambda' > 1$ und $\log x < x - 1$ für $x > 1$ folgt $1 + \log b \lambda' - b \lambda' < 0$, d. h. es ist

$$O(n^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{n(1+\log b \lambda' - b \lambda')}) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit ist aber die zweite Beziehung in (2.10) bewiesen.

§ 3. Äquivalenzsätze für die Verfahren E_p , B , S_β und T_α

Um zu dem in der Einleitung in Aussicht gestellten Äquivalenzsatz zwischen den T_α - und den T'_b -Verfahren zu gelangen, muß hier zunächst die Äquivalenz der T_α -Verfahren mit den F_a -Verfahren untersucht werden.

Satz II. Ist $a > 0$ und genügt die Matrix A für ein $\lambda > 0$ der Voraussetzung $V(a, \lambda)$, so ist das A -Verfahren für Folgen endlicher Ordnung dem F_a -Verfahren äquivalent.

Beweis. 1. Wir zeigen zuerst: Ist $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ für ein $\sigma \geq 0$ und $F_a\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu = 0$ für ein $a > 0$, so ist auch $A\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu = 0$. Wir setzen $t_n = F_a s$ und $t'_n = A s$. Nach Voraussetzung ist $t_n = o(1)$. Wir müssen also zeigen, daß $t'_n = o(1)$ ist. Wir wählen eine Folge $m = m(n)$ und Zahlen $\vartheta = \vartheta(n)$, so daß $m = \lambda n + \vartheta$ ganz und $0 \leq \vartheta < \text{Max}(1, \lambda)$ ist. Geht nun n über die natürlichen Zahlen gegen ∞ , so durchläuft m eine Teilfolge der natürlichen Zahlen und geht ebenfalls gegen ∞ . Da aber mit $t_n = o(1)$ auch $t_m = o(1)$ gilt für $n \rightarrow \infty$, so genügt es offenbar zu zeigen, daß $t'_n - t_m = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$. Wenn wir zunächst für $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{3}{8}$

$$\bar{t}'_n = \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} a_{n\nu} s_\nu \quad \text{und} \quad \bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu$$

setzen, so ist es nach den Hilfssätzen 1 und 5 klar, daß nur noch $\bar{t}'_n - \bar{t}_m = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$ nachgewiesen werden muß. Im Anschluß an HYSLOP [4] gehen wir dazu so vor:

Es seien $s > \text{Max}(\sigma - \frac{1}{2}, 0)$ und $k > \text{Max}(\sigma + \frac{1}{2}, 0)$ ganze Zahlen. Wir bilden

$$\bar{t}'_n - \bar{t}_m = \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} \left[a_{n\nu} s_\nu - \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \right]$$

und dies ist nach Hilfssatz 5

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^s < \nu < m+m^s} s_\nu \left[e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m} + g_k + R_k} - e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} s_\nu e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{g_k^\mu}{\mu!} + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} s_\nu e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{(g_k + R_k)^\mu - g_k^\mu}{\mu!} + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=2s+1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} (g_k + R_k)^\mu = A_1 + A_2 + A_3.
 \end{aligned}$$

Um einzusehen, daß $A_1 = o(1)$ ist, betrachten wir für $1 \leq \mu \leq 2s$

$$v = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \frac{g_k^\mu}{\mu!}.$$

g_k^μ ist nach (2.2) eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i,j} \bar{l}_{ij} \frac{(\nu-m)^j}{m^i}.$$

Dabei ist aber darauf zu achten, daß $0 \leq j \leq \mu$ gilt für $i = \mu$ und $0 \leq j \leq i + \mu$ für $i > \mu$. Die $\bar{l}_{ij}$ sind unabhängig von ν und für $n \rightarrow \infty$ beschränkt. Der Ausdruck v kann also auf Summanden

$$v_{ij} = \bar{l}_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \frac{(\nu-m)^j}{m^i}$$

zurückgeführt werden, wobei i und j den angegebenen Einschränkungen unterworfen sind. Nun ist nach Voraussetzung

$$t_n = F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-a \frac{(\nu-n)^2}{n}} = o(1) \quad (n = 1, 2, \dots; n \rightarrow \infty),$$

also nach Hilfssatz 4 auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-a \frac{(\nu-x)^2}{x}} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Wir können somit Hilfssatz 3 (mit $q = 0$) anwenden. Ist $i = \mu$ und $0 \leq j \leq \mu$, so hat man für beliebiges $\eta > 0$

$$v_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2} - i - \mu + \frac{1}{2}(j+1) + \eta}) = o(m^{-\frac{1}{2} \mu + \eta})$$

und dies ist, weil η beliebig klein gewählt werden kann und $\mu \geq 1$ ist, $o(1)$ für $n \rightarrow \infty$. Die anderen Summanden v_{ij} , die durch $i > \mu$, $0 \leq j \leq i + \mu$ festgelegt sind, erlauben die Abschätzung

$$v_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}(j+1) + \eta}) = o(m^{-\frac{1}{2}(\mu+1) + \frac{1}{2}\mu + \eta}) = o(m^{-\frac{1}{2} + \eta}) = o(1).$$

Also ist gezeigt, daß v und damit A_1 für $n \rightarrow \infty$ eine Nullfolge bildet.

A_2 ist eine Summe von Gliedern der Form

$$w = O(1) \left[\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} \nu^{\sigma} |R_k|^r |g_k|^q e^{-a \frac{(v-m)^2}{m}} \right] \quad (r \geq 1, q \geq 0, 1 \leq r+q = \mu \leq 2s).$$

Setzen wir für R_k und g_k die Ausdrücke (2.2) und (2.3) ein, so zerfällt w in Summanden der Form

$$\bar{w} = O(1) \left[\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} \nu^{\sigma} \frac{|v-m|^{\lambda(2k+1)}}{m^{2kr}} \frac{|v-m|^j}{m^i} e^{-a \frac{(v-m)^2}{m}} \right];$$

dabei ist

$$1 \leq r \leq \mu, \quad r+q = \mu \leq 2s, \quad 0 \leq j \leq i+q, \quad 0 \leq q \leq i, \quad 0 \leq \lambda \leq r.$$

Die Anwendung der Hilfssätze 1 und 2 zeigt, daß für $k > \sigma + \frac{1}{2}$

$$\bar{w} = O(m^{-\frac{1}{2} + \sigma - i - 2kr + \frac{1}{2}(2kr + r + j + 1)}) = O(m^{\sigma - i - r(k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(i+q)}) = O(m^{\sigma - k + \frac{1}{2}}) = o(1)$$

gilt. Es ist also w und damit auch A_2 für $n \rightarrow \infty$ eine Nullfolge.

Schließlich ist noch A_3 zu untersuchen. Für $|v-m| \leq m^{\frac{1}{2}}$ gilt nach (2.1)

$$\begin{aligned} g_k + R_k &= g_1 + R_1 = l_{10} \frac{1}{m} + l_{11} \frac{v-m}{m} + O\left(\frac{|v-m|^3 + 1}{m^2}\right) \\ &= \frac{|v-m| + 1}{m} O(1) + \frac{|v-m|^3}{m^2} O(1). \end{aligned}$$

Wegen $|v-m| \leq m^{\frac{1}{2}}$ ($\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$) ist für genügend große n $|g_k + R_k| \leq \gamma < 1$, so daß das Verhalten von A_3 für $n \rightarrow \infty$ durch

$$z = O\left(m^{-\frac{1}{2}} \sum_{m-m^{\frac{1}{2}} < v < m+m^{\frac{1}{2}}} \nu^{\sigma} |R_k + g_k|^{2s+1} e^{-a \frac{(v-m)^2}{m}}\right)$$

wiedergegeben wird. Beachtet man, daß die Darstellung

$$|g_k + R_k|^{2s+1} = \frac{|v-m|^{2s+1} + 1}{m^{2s+1}} O(1) + \sum_{q=1}^{2s+1} O(1) \frac{|v-m|^{2q+2s+1}}{m^{q+2s+1}}$$

möglich ist, so folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 für $s > \text{Max}(\sigma - \frac{1}{2}, 0)$

$$z = O(m^{-\frac{1}{2} + \sigma - s}) + O(m^{-1 + \sigma - 2s}) + O(m^{-\frac{1}{2} + \sigma - s}) = o(1).$$

A_3 ist also auch eine Nullfolge und damit $t'_n - t_m = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$.

Zu bemerken ist, daß zum Nachweis für $A_2 = o(1)$ und $A_3 = o(1)$ nur die Hilfssätze 1 und 2, jedoch nicht die Voraussetzung $t_n = F_a s = o(1)$, herangezogen wurde. Diese Tatsache wird in dem folgenden zweiten Teil des Beweises benützt.

2. Es ist noch nachzuweisen, daß aus $t'_n = o(1)$ die Beziehung $t_n = o(1)$ folgt. Die Voraussetzung ist nach (2.1) gleichbedeutend mit

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^{\frac{1}{2}} < v < m+m^{\frac{1}{2}}} e^{-a \frac{(v-m)^2}{m} + g_k + R_k} s_{\nu} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty);$$

wo g_k und R_k die in (2.2) und (2.3) angegebene Bedeutung haben und m und n durch $m = \lambda n + \vartheta$ verbunden sind. Daraus folgt

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m} + g_k + R_k} s_{\nu} = o(1) \quad \text{für } m = 1, 2, \dots; m \rightarrow \infty$$

oder

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_{\nu} + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} (e^{g_k + R_k} - 1) s_{\nu} = o(1)$$

oder mit den Bezeichnungen des ersten Beweisteiles

$$(3.1) \quad \bar{t}_m + A_1 + A_2 + A_3 = o(1) \quad (m \rightarrow \infty).$$

Nach unserer obigen Bemerkung ist $A_2 = o(1)$ und $A_3 = o(1)$, wenn nur $s > \text{Max}(\sigma - \frac{1}{2}, 0)$, $k > \text{Max}(\sigma + \frac{1}{2}, 0)$ und $s_{\nu} = o(\nu^{\sigma})$ gilt. Für solche Zahlen s und k kann also (3.1) zu

$$(3.2) \quad \bar{t}_m + A_1 = o(1) \quad (m \rightarrow \infty)$$

vereinfacht werden. Zu zeigen ist noch, daß $\bar{t}_m = o(1)$ gilt. Nach Hilfssatz 2 wissen wir, daß für jede Folge s_{ν} mit $s_{\nu} = o(\nu^{\sigma})$ die Beziehung

$$\bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_{\nu} = o(m^{\sigma}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

gilt. Es sei γ die untere Grenze aller $\bar{\gamma}$, für die

$$\bar{t}_m = o(m^{\bar{\gamma}})$$

ist. Auf jeden Fall ist dann $\gamma \leq \sigma$. Ist $\gamma < 0$, so ist $\bar{t}_m = o(1)$ für $m \rightarrow \infty$ und damit die Behauptung bewiesen. Ist aber $0 \leq \gamma \leq \sigma$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\bar{t}_m = o(m^{\gamma+\varepsilon}),$$

jedoch

$$\bar{t}_m = o(m^{\gamma-\delta})$$

für kein $\delta > 0$. Wir betrachten den Ausdruck

$$A_1 = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^{\varepsilon} < \nu < m+m^{\varepsilon}} s_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{g_k^{\mu}}{\mu!}.$$

Nach dem ersten Beweisteil ist dieser eine endliche Summe von Ausdrücken der Form

$$p_{ij} = \bar{l}_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_{\nu} \frac{(\nu-m)^j}{m^i}.$$

Dabei gilt $0 \leq j \leq \mu$ für $i = \mu$ und $0 \leq j \leq i + \mu$ für $i > \mu$ ($1 \leq \mu \leq 2s$). Wegen

$$\bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a \frac{(\nu-m)^2}{m}} s_{\nu} = o(m^{\gamma+\varepsilon}) \quad (m = 1, 2, \dots; m \rightarrow \infty)$$

ist nach den Hilfssätzen 1 und 4 auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_v e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} s_v = o(x^{\gamma+\varepsilon}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hilfssatz 3 liefert dann (mit $q = \gamma + \varepsilon$) im ersten Fall ($i = \mu$, $0 \leq j \leq \mu$)

$$p_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2}-i+\gamma+\varepsilon+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}) = o(m^{-\frac{1}{2}\mu+\gamma+\varepsilon+\eta}) = o(m^{\gamma+\varepsilon+\eta-\frac{1}{2}})$$

und, da ε und η beliebig klein gewählt werden dürfen,

$$p_{ij} = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

für ein $\delta_0 > 0$. Im zweiten Fall ($i \geq \mu + 1$, $0 \leq j \leq i + \mu$) gilt

$$p_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2}-i+\gamma+\varepsilon+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}) = o(m^{\gamma+\varepsilon+\eta-\frac{1}{2}}) = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

mit demselben δ_0 wie oben. Es gilt also

$$A_1 = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

und damit nach (3.2)

$$\bar{t}_m = o(1) + o(m^{\gamma-\delta_0}).$$

Wäre $\gamma - \delta_0 > 0$, so wäre $\bar{t}_m = o(m^{\gamma-\delta_0})$, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von γ . Also ist $\gamma - \delta_0 \leq 0$ und damit $\bar{t}_m = o(1)$. Das sollte aber noch bewiesen werden.

Aus Satz II, Hilfssatz 5 und dem Ergebnis von HYSLOP [4], das die Äquivalenz von $F_{\frac{1}{2}}$ mit dem B -Verfahren für Folgen endlicher Ordnung garantiert, ergeben sich die nachfolgenden Sätze III und IV, mit denen Ergebnisse von W. MEYER-KÖNIG verallgemeinert werden.

Satz III. Für Folgen endlicher Ordnung ist

$$E_p \text{ äquivalent mit } F_a \text{ für } a = \frac{2^p-1}{2^p-1} \quad (0 < p; \frac{1}{2} < a < \infty)$$

$$S_\beta \text{ äquivalent mit } F_a \text{ für } a = \frac{1-\beta}{2} \quad (0 < \beta < 1; 0 < a < \frac{1}{2})$$

$$T_\alpha \text{ äquivalent mit } F_a \text{ für } a = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \quad (0 < \alpha < 1; 0 < a < \infty)$$

$$B \text{ äquivalent mit } F_{\frac{1}{2}}.$$

Schalten wir noch das F_a -Verfahren aus, so ergibt sich

Satz IV. Für Folgen endlicher Ordnung ist

$$T_\alpha \text{ äquivalent mit } E_p \text{ für } \alpha = \frac{2^p-1}{2^{p+1}-1} \quad (0 < p; 0 < \alpha < \frac{1}{2})$$

$$T_{\frac{1}{2}} \text{ äquivalent mit } B$$

$$T_\alpha \text{ äquivalent mit } S_\beta \text{ für } \alpha = \frac{1}{2-\beta} \quad (0 < \beta < 1; \frac{1}{2} < \alpha < 1).$$

Insbesondere wurde damit der M. RIESZsche Satz $B \sim T_{\frac{1}{2}}$ auf Folgen endlicher Ordnung ausgedehnt.

Dem Satz II entspricht der folgende Satz II' für das in § 1 definierte J_a -Verfahren.

Satz II'. Ist $a > 0$ und genügt die Matrix A' für ein $\lambda > 0$ der Voraussetzung $V'(a, \lambda)$, so ist das A' -Verfahren für Funktionen $s(t) \in \mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung dem J_a -Verfahren äquivalent.

Der Beweis dieses Satzes sei unterdrückt. Er ergibt sich im wesentlichen dadurch, daß man im Beweis des Satzes II die Summen über ν durch Integrale über t ersetzt.

Zieht man Hilfssatz 6 heran, so folgt schließlich

Satz III'. Das T'_b -Verfahren ($b = 2a > 0$) ist für Funktionen $s(t) \in \mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung mit dem J_a -Verfahren äquivalent.

§ 4. Der Äquivalenzsatz für die Verfahren T_α und T'_b

Nach Satz III' ist das T'_b -Verfahren für Funktionen $s(t) \in \mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung mit dem J_a -Verfahren äquivalent für $a = \frac{b}{2}$. Ist eine Folge s_ν gegeben, so definiere man dazu die Funktion $s(t) = s_\nu$ für $\nu \leq t < \nu + 1$ ($\nu \geq 0$, ganz). Auf diese Weise lassen sich die Verfahren T'_b und J_a auch zur Limitierung von Folgen nutzbar machen, und es sind T'_b und J_a für $b = 2a > 0$ äquivalent für Folgen endlicher Ordnung. Andererseits ist für solche Folgen das T_α -Verfahren mit dem F_a -Verfahren äquivalent, wenn $a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$ ($a > 0$; $0 < \alpha < 1$) gilt. Um also das T'_b -Verfahren für Folgen mit dem T_α -Verfahren in Verbindung zu bringen, genügt es, dies für die Verfahren F_a und J_a (für Folgen) zu tun.

Satz V. Für jedes $a > 0$ ist das F_a -Verfahren für Folgen endlicher Ordnung mit dem J_a -Verfahren äquivalent.

Beweis. Definiert man $s(t)$ zu s_ν wie oben, so gilt

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \int_0^\infty e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} s(t) dt = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^\infty \int_\nu^{\nu+1} e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} dt s_\nu.$$

Die Integrale der rechten Seite formen wir um, indem wir auf die Integranden $f(t) = e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}}$ ($t \geq 0$, $n \geq 1$) die TAYLORSche Formel anwenden:

$$e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} = e^{-a \frac{(\nu-n)^2}{n}} + \sum_{\mu=1}^{r-1} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(\nu) (t-\nu)^\mu + \\ + \frac{1}{(r-1)!} \int_\nu^t f^{(r)}(x) (t-x)^{r-1} dx \quad (r \geq 1),$$

also

$$\int_\nu^{\nu+1} e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} dt = e^{-a \frac{(\nu-n)^2}{n}} + \sum_{\mu=1}^{r-1} \frac{1}{(\mu+1)!} f^{(\mu)}(\nu) + \frac{1}{(r-1)!} \int_\nu^{\nu+1} \int_\nu^t f^{(r)}(x) (t-x)^{r-1} dx dt.$$

Nun ist

$$\int_{x=v}^{v+1} \int_{t=x}^{v+1} (t-x)^{r-1} dt f^{(r)}(x) dx = \frac{1}{v} \int_v^{v+1} f^{(r)}(x) (v+1-x)^r dx,$$

also erhalten wir

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{aligned} J_a s - F_a s &= \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{r-1} \frac{1}{(\mu+1)!} f^{(\mu)}(v) s_v + \\ &+ \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \int_v^{v+1} f^{(r)}(x) (v+1-x)^r dx s_v = T_1 + T_2. \end{aligned} \right.$$

Wie man sich leicht überzeugt, konvergieren alle auftretenden Reihen.

1. Wir zeigen zuerst, daß aus $t_n = F_a s = o(1)$ die Beziehung $t'_n = J_a s = o(1)$ folgt, sofern $s_v = o(v^\sigma)$ für ein $\sigma \geq 0$ gilt. Dazu zeigen wir, daß $T_1 = T_1(n)$ und $T_2 = T_2(n)$ Nullfolgen sind für $n \rightarrow \infty$. Nehmen wir $r = 2p > 2\sigma$ (p eine natürliche Zahl), dann ist wegen $|v+1-x| \leq 1$ für $v \leq x \leq v+1$

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \int_v^{v+1} f^{(2p)}(x) (v+1-x)^{2p} dx s_v = O\left(n^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} |s(t) f^{(2p)}(t)| dt\right),$$

wenn $s(t)$ wie oben definiert ist. Wegen

$$(4.2) \quad f^{(\mu)}(v) = e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} \sum_{\tau=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \frac{a_\tau^{(\mu)}}{n^{\mu-\tau}} (v-n)^{\mu-2\tau} \quad (a_\tau^{(\mu)} \text{ Konstante}),$$

gilt

$$\int_0^{\infty} |f^{(2p)}(t) s(t)| dt = O\left(\sum_{\tau=0}^p \frac{a_\tau^{(2p)}}{n^{2p-\tau}} \int_0^{\infty} e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} |t-n|^{2p-2\tau} t^\sigma dt\right),$$

und nach Hilfssatz 2

$$\frac{1}{n^{2p-\tau}} \int_0^{\infty} e^{-a \frac{(t-n)^2}{n}} |t-n|^{2p-2\tau} t^\sigma dt = O(n^{\sigma-2p+\tau+\frac{1}{2}(2p-2\tau+1)}) = O(n^{\sigma+\frac{1}{2}-p}).$$

Da aber $p > \sigma$ gewählt wurde, so folgt $T_2 = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$.

Wichtig für den nachherigen zweiten Beweisschritt ist der Umstand, daß $T_2 = o(1)$ ohne Hereinnahme der Voraussetzung $F_a s = o(1)$ bewiesen wurde.

Um T_1 abzuschätzen, beachten wir, daß sich T_1 auf Grund von (4.2) in endlich viele Summanden der Form

$$t_{ij} = c_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} \frac{(v-n)^j}{n^i} s_v$$

aufspalten läßt, wobei die c_{ij} Konstante sind und für die ganzen Zahlen i und j gilt $0 \leq j \leq i$, $1 \leq i$. Nun folgt aus

$$F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} s_v = o(1) \quad (n = 1, 2, \dots; n \rightarrow \infty)$$

nach Hilfssatz 4, daß auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-x)^2}{x}} s_v = o(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

ist. Damit ist (für $q=0$) die Voraussetzung des Hilfssatzes 3 erfüllt; es gilt also

$$t_{ij} = o(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(j+1) + \eta - i}) = o(n^{\frac{1}{2}j - i + \eta}) = o(1),$$

da η beliebig klein gewählt werden kann. Es ist also $T_1 = o(1)$.

2. Es sei nun $J_a s = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$ und $s_v = o(v^\sigma)$ vorausgesetzt. Bewiesen werden soll, daß auch $F_a s = o(1)$ ist. Da $T_2 = T_2(n)$ eine Nullfolge bildet, ist nach (4.1) nur noch $T_1 = o(1)$ zu beweisen. Nach Hilfssatz 2 gilt

$$F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} s_v = o(n^\sigma) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Es sei nun γ die untere Grenze aller $\bar{\gamma}$ für die $F_a s = o(n^{\bar{\gamma}})$ gilt. Es ist also $\gamma \leq \sigma$, und wenn schon $\gamma < 0$ ausfällt, so sind wir mit unserem Beweis fertig. Gilt aber $0 \leq \gamma \leq \sigma$, so ist

$$(4.3) \quad F_a s = o(n^{\gamma + \varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wie wir bereits wissen, setzt sich der Ausdruck T_1 aus endlich vielen Summanden der Form

$$t_{ij} = c_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-a \frac{(v-n)^2}{n}} \frac{(v-n)^j}{n^i} s_v \quad (0 \leq j \leq i, 1 \leq i)$$

zusammen. Wegen (4.3) zusammen mit den Hilfssätzen 3 und 4 (mit $q = \gamma + \varepsilon$) folgt aber

$$t_{ij} = o(n^{-\frac{1}{2} + \gamma + \varepsilon + \frac{1}{2}(j+1) - i + \eta}) = o(n^{\gamma + \varepsilon + \eta - \frac{1}{2}}) = o(n^{\gamma - \delta_0}),$$

wobei $\delta_0 > 0$ eine von i und j unabhängige Zahl bedeutet (ε und η können beliebig klein gewählt werden). Es ist also $T_1 = o(n^{\gamma - \delta_0})$. Aus (4.1) zusammen mit $T_2 = o(1)$ und $J_a s = o(1)$ resultiert

$$F_a s = o(1) + o(n^{\gamma - \delta_0}).$$

Wäre $\gamma - \delta_0 > 0$, so wäre $F_a s = o(n^{\gamma - \delta_0})$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von γ . Also ist $\gamma - \delta_0 \leq 0$, d.h. $T_1 = o(1)$. Damit ist Satz V bewiesen.

Ziehen wir noch die Sätze III und III' heran, so erhalten wir

Satz VI. Ist $b = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ($b > 0$; $0 < \alpha < 1$) so ist das T'_b -Verfahren für Folgen endlicher Ordnung mit dem T_α -Verfahren äquivalent.

Literatur

[1] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [2] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. Rendiconti Palermo **41**, 36—53 (1916). — [3] HYSLOP, J. M.: Some relations between the de la Vallée-Poussin and Abel methods of summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **40**, 449—467 (1935). — [4] HYSLOP, J. M.: The generalisation of a theorem on Borel summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **41**, 243—256 (1936). — [5] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1949). — [6] MEYER-KÖNIG, W.: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179—205 (1952).

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 9. März 1956)

Extensions of a Theorem of Hellinger and Toeplitz

By

ANGUS E. TAYLOR

1. Introduction

Consider the Hilbert space l^2 of sequences $x = \{\xi_n\}$ such that $\sum_n |\xi_n|^2 < \infty$. Let (a_{ij}) be an infinite matrix such that

$$(1) \quad \eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$$

is a convergent series for each x in l^2 , and moreover such that the sequence $\{\eta_i\}$ is in every such case an element of l^2 . If this element of l^2 be denoted by y , the mapping of x into y defines a bounded linear operator on l^2 . This result is due originally to HELLINGER and TOEPLITZ [3, pp. 321—322]; for a more recent treatment of the subject see a paper by STONE and TAMARKIN [6, pp. 298—302]. The purpose of the present paper is to point out a method of proving the Hellinger-Toeplitz theorem by an argument which applies to sequence spaces of a very inclusive type. Then we are able to see that the theorem can be greatly generalized. One application of the generalization is a new proof of the theorem which asserts that if X and Y are normed linear spaces and A is a linear mapping of X into Y whose conjugate (also called adjoint) exists, then A must be continuous. For Hilbert space this implies the known result that if A is a linear mapping of a Hilbert space into itself such that the adjoint A^* is everywhere defined, then A must be continuous [6, p. 296].

The essential tool is the closed graph theorem, which asserts that a closed linear mapping of one Banach space into another must be continuous.

2. Linear operators on sequence spaces

By a sequence space we mean a space whose elements are sequences $\{\xi_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), where each ξ_n is a number (real or complex). We call ξ_n the n -th component of the element. We are going to be interested in sequence spaces which are Banach spaces and which are such that each ξ_n is a continuous function of x . Furthermore, it is assumed that in the space addition and multiplication by scalars are carried out component-wise in the usual way. All the familiar sequence spaces are of this type.

THEOREM 1. *Let X and Y each be a Banach space which is a sequence space for which the components of a vector are continuous functions of the vector. Let (a_{ij}) be an infinite matrix such that the series*

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$$

converges for each element $x = \{\xi_j\}$ in X and defines a sequence $y = \{\eta_i\}$ which is an element of Y . If we write $y = Ax$ to express this dependence of y on x , the operator A is a bounded linear operator on X into Y .

PROOF. For each n and i the sum

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j$$

defines a continuous linear functional on X . The limit as $n \rightarrow \infty$ is therefore a continuous linear functional [I, Th. 5, p. 80]. We denote this functional by x'_i , and its value at x by $x'_i(x)$. Observe that Ax is the sequence $\{x'_i(x)\}$, which is an element of Y . It is evident that A is linear (in the algebraic sense). Consequently it will follow that A is continuous if we prove that A is closed. Here is where we use the "closed-graph theorem" [I, Th. 7, p. 41]. Suppose then that $x_n \rightarrow x$ and $Ax_n \rightarrow y$. From $x_n \rightarrow x$ we have $x'_i(x_n) \rightarrow x'_i(x)$ for each i . Since $x'_i(x)$ is the i -th component of Ax , the continuity of components and $Ax_n \rightarrow y$ together imply $x'_i(x_n) \rightarrow \eta_i$, where $y = \{\eta_i\}$. But then we have $x'_i(x) = \eta_i$ by the uniqueness of limits. This means that $Ax = y$; hence A is closed and the proof is complete.

Theorem 1 can be generalized considerably. The spaces X and Y need not be Banach spaces, but may be complete metrisable topological linear spaces of a more general type known as (FK) spaces. The essential characteristics of an (FK) space are: (1) it is a complete metrisable topological linear space; (2) its elements are sequences $x = \{\xi_n\}$ and each ξ_n is a continuous function of x . The closed graph theorem is applicable to such spaces. The statement and proof of Theorem 1 for (FK) spaces were given by ZELLER (Satz 4.4, p. 471 of [7]).

3. A generalization

The concept of a sequence space such that the components of a vector are continuous functions of the vector can be broadened in the following way: Let S be an arbitrary set and consider a Banach space Y whose elements are functions defined on S , with values in a Hausdorff topological linear space Z . We assume that addition and scalar multiplication in Y are carried out on the functions in the usual way. If $y \in Y$ and $s \in S$, we call the value $y(s)$ the component of y at s . In what follows we shall require that $y(s)$ depend continuously on y . We revert to the sequence space situation of § 2 as a special case; there we take for S the set of positive integers and for Z the scalar field associated with Y .

The other ingredient of the generalization of Theorem 1 is the appropriate substitute for the series

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j.$$

Let X be an arbitrary Banach space and let $[X, Z]$ denote the set of all continuous linear mappings of X into the Hausdorff topological linear space Z .

For each s in S let $a(s)$ be such a mapping. Then we think of $a(s)x$ as the general object of which (2) is a special case, with s corresponding to i .

THEOREM 2. *Let X and Z be as specified in the foregoing paragraph. Let Y be a Banach space of functions, of the type described in the first paragraph of this section. Let $a(s)$ denote the value at s of a function on S to $[X, Z]$ such that $a(s)x$, as a function of s , is a member y of Y for each x in X . If we write $y = Ax$ to express this dependence of y on x , so that $(Ax)(s) = a(s)x$, then the operator A is a bounded linear operator on X into Y .*

PROOF. The fact that A is linear is evident from the nature of $a(s)$. Hence all that is required is to prove that A is closed. If $x_n \rightarrow x$ we conclude $a(s)x_n \rightarrow a(s)x$ for each s , since $a(s) \in [X, Z]$. If $Ax_n \rightarrow y$ we conclude $(Ax_n)(s) \rightarrow y(s)$ for each s , by the continuous dependence of components on vectors. Thus we see that $x_n \rightarrow x$ and $Ax_n \rightarrow y$ together imply $Ax = y$, or that A is closed. Here we use the fact that Z is a Hausdorff space to guarantee that convergent sequences have unique limits.

THEOREM 3. *Let X , Y and Z be as specified in Theorem 2. Then every continuous linear mapping A of X into Y is expressible in the form*

$$(Ax)(s) = a(s)x$$

where $a(s)$ is a function on S to $[X, Z]$ of such a nature that $a(s)x$, as a function of s , is for each x in X a member of Y .

PROOF. It suffices to observe that $(Ax)(s)$ is a function on $X \times S$ to Z which, for fixed s , is linear and continuous in x ; the continuity follows from the continuity of A and the assumption that in Y the component of a vector depends continuously on the vector.

Theorem 3 is a generalization of a theorem of IZUMI and SUNOUCHI, which is given in a paper not accessible to the writer [4]; the theorem of IZUMI and SUNOUCHI is stated in the review of their paper in Mathematical Reviews, vol. 7, page 306. It is essentially Theorem 3 for the case in which Z is the scalar field.

If no further information about X or Y is given it is not to be expected that one can state an explicit condition on $a(s)$ which will guarantee that $a(s)x$, as a function of s , is an element of Y for each x in X . There is, however, a special case of interest in which such an explicit condition on $a(s)$ can be given. Suppose that Z is a Banach space and that Y is the Banach space of all bounded functions defined on S with values in Z ; the norm in Y is defined as

$$\|y\|_Y = \sup_s \|y(s)\|_Z.$$

Here we use Y or Z as subscript to indicate the space in which the norm is taken. The following theorem is a direct generalization of a result of R. S. PHILLIPS [5, Th. 7.1, p. 538].

THEOREM 4. *If Y and Z are spaces as described in the foregoing sentence, and X is any Banach space, the general form of a continuous linear operator*

A on X into Y is $(Ax)(s) = a(s)x$, where for each s in S $a(s)$ is a member of $[X, Z]$, and

$$(3) \quad \sup_s \|a(s)\| < \infty.$$

The norm of A is

$$(4) \quad \|A\| = \sup_s \|a(s)\|.$$

PROOF. If A is given, it determines $a(s)$, and vice-versa. The inequality $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|$ becomes

$$\sup_s \|a(s)x\|_Z \leq \|A\| \|x\|,$$

and this implies

$$\sup_s \|a(s)\| \leq \|A\|.$$

On the other hand, if (3) holds,

$$\|a(s)x\|_Z \leq \|a(s)\| \|x\| \leq \sup_s \|a(s)\| \|x\|,$$

and so $a(s)x$ defines an element Ax in Y , with

$$\|Ax\|_Y = \sup_s \|a(s)x\|_Z \leq \sup_s \|a(s)\| \|x\|.$$

Therefore

$$\|A\| \leq \sup_s \|a(s)\|.$$

This completes the proof.

4. A theorem relating to the conjugate of an operator

If X is any linear space (regardless of topology) we define X' as the linear space of linear functionals defined on X . Here linearity of a functional is understood in the purely algebraic sense. We use x' as a generic symbol for elements of X' . If X and Y are linear spaces and A is a linear mapping of X into Y , we define the *transpose* of A as the mapping of A^T of Y' into X' , where

$$(A^T y')(x) = y'(Ax).$$

If X and Y are *normed* linear spaces, we use X' and Y' to denote the normed linear spaces of *continuous* linear functionals on X and Y , respectively. Evidently X' and Y' are subspaces of X' and Y' respectively. As normed linear spaces, X' and Y' are complete. If A is a linear mapping of X into Y , and if the transpose A^T has the property that $A^T(Y') \subset X'$ (i.e., if $x' = A^T y'$ is continuous on X whenever y' is continuous on Y), we say that the *conjugate* of A exists, and we define the conjugate operator A' as the restriction of A^T to Y' . It is a standard fact that A' exists and is a continuous mapping of Y' into X' , provided that A is continuous. It is the converse of this fact that we now consider.

THEOREM 5. *Let X and Y be any normed linear spaces. If A is a linear mapping of X into Y such that the conjugate A' exists in the sense specified in the foregoing paragraph, then A is continuous.*

This theorem was proved by DUNFORD [2, Th. 18, p. 317] as an application of the principle of uniform boundedness. We shall give a different argument. Both proofs rest ultimately on the fact that a complete metric space is of the second category. The proof which we give is a direct application of Theorem 2. To make clear the application we list the counterparts, in the present situation, of the sets and functions occurring in Theorem 2. We use F to denote the field of scalars (real or complex).

Theorem 2: $X \quad Y \quad Z \quad S \quad A \quad (Ax) (s).$

Present situation: $Y \quad X \quad F \quad X \quad A' \quad (A'y') (x).$

For fixed x , $x'(x)$ is the component of x' at x ; this is evidently continuous as a function of x' when x' varies over X' . The hypothesis that $A^T Y' \subset X'$ corresponds to the assumption in Theorem 2 that $(Ax)(s)$, as a function of s , belongs to Y for each x . Consequently, by application of Theorem 2, we conclude that A' is continuous. Then

$$\|A'y'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|y'(Ax)\| \leq \|A'\| \|y'\|.$$

Consequently, for each x such that $\|x\| \leq 1$ we have

$$\|Ax\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} \|y'(Ax)\| \leq \|A'\|.$$

This shows that A is continuous.

Bibliography

- [1] BANACH, S.: *Théorie des Opérations Linéaires*. Warsaw 1932. — [2] DUNFORD, NELSON: Uniformity in linear spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **44**, 305—356 (1938). — [3] HELLINGER, E., and O. TOEPLITZ: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Math. Ann.* **69**, 289—330 (1910). — [4] IZUMI, S., and G. SUNOUCHI: Notes on Banach space. VI. Abstract integrals and linear operators. *Proc. Imperial Acad. Tokyo* **19**, 169—173 (1943). — [5] PHILLIPS, R. S.: On linear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **48**, 516—541 (1940). — [6] STONE, M. H., and J. D. TAMARKIN: Elementary proofs of some known theorems of the theory of complex Euclidean spaces. *Duke Math. J.* **3**, 294—302 (1937). — [7] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. *Math. Z.* **53**, 463—487 (1951).

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles 24 (USA)

(Eingegangen am 14. März 1956)

Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokalkonvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω)

Von

MAX LANDSBERG

Einleitung und Ergebnisse

Eine Abbildung Θ von einem linearen Raum F in einen linearen Raum wird antilinear genannt, wenn $\Theta(x+y) = \Theta(x) + \Theta(y)$, $\Theta(ax) = \bar{a}\Theta(x)$ ($x, y \in F$; a komplex) ist. Gehört x zum linearen Raum F und ist u eine Linearform auf F , so schreiben wir $\langle x, u \rangle$ für $u(x)$. Ist E ein lokalkonvexer Raum mit dem dualen Raum E' und A ein stetiger Endomorphismus von E , so gibt es bekanntlich einen (und nur einen) Endomorphismus A' von E' mit $\langle Ax, u \rangle = \langle x, A'u \rangle$ ($x \in E$, $u \in E'$), nämlich die zu A adjungierte Abbildung. Mit I wird im folgenden die identische Abbildung von E bezeichnet.

Ist nun A ein stetiger Endomorphismus des lokalkonvexen Raumes E so heiße A symmetrisierbar von 1. Art, wenn eine antilineare Abbildung Θ von E' in E existiert, so daß $\langle \Theta u, u \rangle \neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $u \in E'$ und $\langle \Theta u, v \rangle = \overline{\langle \Theta v, u \rangle}$, $\langle A\Theta u, v \rangle = \overline{\langle A\Theta v, u \rangle}$ ($u, v \in E'$) ist. A heiße symmetrisierbar von 2. Art, wenn A' als Endomorphismus des mit der schwachen Topologie versehenen Raumes E' symmetrisierbar von 1. Art ist. Wir nennen A kurz symmetrisierbar, wenn A symmetrisierbar von 1. Art oder von 2. Art ist. Ein lokalkonvexer Raum werde symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art bzw. symmetrisierbar genannt, wenn seine identische Abbildung symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art bzw. symmetrisierbar ist.

Es sind also genau die z. B. von 1. Art symmetrisierbaren lokalkonvexen Räume, auf denen stetige von 1. Art symmetrisierbare Endomorphismen existieren. Wichtige Räume der Funktionalanalysis sind symmetrisierbar. Offensichtlich ist jeder HILBERT-Raum symmetrisierbar von 1. Art und von 2. Art. Ist E ein HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt (x, y) , so ist der stetige Endomorphismus A von E genau dann symmetrisierbar von 1. Art, wenn es einen selbstadjungierten Endomorphismus H von E gibt, so daß $(Hx, x) \neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $x \in E$ und außerdem auch AH selbstadjungiert ist. Symmetrisierbar sind auch die Folgenrume l_r ($r \geq 1$) und l_∞ . Jeder Raum vom Typus (ω) , d. h. jeder lokalkonvexe und schwach vollständige Raum von unendlicher Dimension, ist symmetrisierbar von 1. Art, jedoch nicht von 2. Art (s. § 2). Wir erinnern hierbei daran, daß ein linearer topologischer Raum als vollständig bezeichnet wird, wenn jeder CAUCHY-Filter des Raumes gegen ein Element des Raumes konvergiert. Eine

unendliche HERMITESCHE Matrix $A = (a_{jk})$ ($a_{jk} = \bar{a}_{kj}$; $j, k = 1, 2, \dots$), die zeilenfinit ist, jedoch sonst keine weiteren Voraussetzungen erfüllen muß, können wir als stetigen und von 1. Art symmetrisierbaren Endomorphismus des Folgenraumes ω auffassen.

F sei nun ein linearer Raum mit dem Endomorphismus T . Die komplexe Zahl λ gehöre genau dann zum Spektrum $\sigma(T)$ von T , wenn es nicht zu jedem $y \in F$ genau ein $x \in F$ mit $Tx - \lambda x = y$ gibt; λ gehöre genau dann zum Punktspektrum $\sigma_p(T)$ von T , d.h. ist genau dann ein Eigenwert von T , wenn in F ein vom Nullelement verschiedenes z mit $Tz = \lambda z$ vorhanden ist. z ist ein zum Eigenwert λ gehöriges Eigenelement. Alle $\lambda \in \sigma(T)$, die nicht zum Punktspektrum gehören, bilden das kontinuierliche Spektrum $\sigma_k(T)$ von T .

In § 1 ist E ein (von 1. Art symmetrisierbarer) lokalkonvexer Raum und A ein stetiger und von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von E . Dann ist, wie man ganz leicht erkennt, das Punktspektrum von A' reell und eine Teilmenge des Punktspektrums von A . Falls A nichtreelle Eigenwerte besitzt, gehören diese also stets zum kontinuierlichen Spektrum von A' . Ist $A' - \lambda I'$ für jedes komplexe λ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$, so ist $\sigma_k(A)$ leer. Weniger an der Oberfläche liegt die Aussage, daß bei Vollstetigkeit von A (im Sinne der bekannten LERAYschen Definition [5]) das Spektrum von A keine nichtreellen Werte enthalten kann.

In § 2 ist E ein Raum vom Typ (ω) (s. oben., s. auch KÖTHE [3]) und A ein stetiger symmetrisierbarer Endomorphismus von E . Dann ist das kontinuierliche Spektrum von A leer. Zu weiteren Aussagen gelangt man im sog. abzählbaren Fall, der durch das Vorhandensein einer abzählbaren (algebraischen) Basis von E' gekennzeichnet ist und für den wohlbekannte Untersuchungen über das Spektrum stetiger Endomorphismen von E vorliegen (s. z.B. TOEPLITZ [6], ULM [7], WILLIAMSON [8]). Bei den folgenden Angaben sei also $\dim E' = \aleph_0$, d.h. E' besitze eine abzählbare Basis. Dann ist das Spektrum von A nicht leer, was überhaupt im abzählbaren Fall für jeden stetigen Endomorphismus von E gilt, und besteht nur aus Eigenwerten. Das Spektrum von A ist weiter genau dann reell, wenn jeder Eigenwert von A auch Eigenwert von A' ist. Letzteres ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\sigma(A)$ höchstens abzählbar ist. Insbesondere hat eine HERMITESCHE zeilenfinite Matrix $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,\dots}$ als stetiger Endomorphismus von ω immer ein nichtleeres Spektrum, das nur aus Eigenwerten besteht. Genau dann besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte, wenn sämtliche Eigenwerte reell sind. Letzteres tritt wiederum genau dann ein, wenn es zu jedem Eigenwert einen finiten Eigenvektor gibt. Für den nicht-abzählbaren Fall ($\dim E' > \aleph_0$) ist über die Existenz entsprechender Aussagen bisher noch nichts bekannt.

§ 1. Symmetrisierbare Endomorphismen

Wir betrachten nur komplexe lineare Räume. Der Begriff Topologie ist im Sinne von BOURBAKI [2] zu verstehen, jedoch soll (im Gegensatz zu BOURBAKI) ein topologischer Raum immer ein HAUSDORFF-Raum sein. Offenbar

ist ein lokalkonvexer Raum genau dann symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art, wenn sein mit der schwachen Topologie versehener dualer Raum symmetrisierbar von 2. Art bzw. von 1. Art ist. In diesem Paragraphen sei der lokalkonvexe Raum E symmetrisierbar von 1. Art und A ein stetiger und von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von E .

Bemerkung 1. M sei ein Teilraum von E , zu dem es einen stetigen Endomorphismus P von E mit $P^2 = P$ und $P(E) = M$ gibt, d.h. eine stetige Projektion von E auf M . Dann ist auch M symmetrisierbar von 1. Art. Ist außerdem $AP = PA$, dann ist die Einschränkung von A auf M ein von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von M .

Beweis. Es genügt, den letzten Teil der Bemerkung zu beweisen. Bezüglich A habe Θ die in der Einleitung angegebene Bedeutung, A_0 sei die Einschränkung von A auf M . Gehört x zu M und ist u eine Linearform auf M , so schreiben wir $[x, u]$ für $u(x)$. Ist nun u ein Element aus M' , so ist durch $x \rightarrow u(Px)$ ($x \in E$) eine Linearform $\varphi_u \in E'$ gegeben, die auf M mit u übereinstimmt. Durch $u \rightarrow P\Theta(P'\varphi_u)$ ($u \in M'$) ist dann eine antilineare Abbildung Θ_0 von M' in M erklärt, für die man leicht $[\Theta_0 u, u] \neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $u \in M'$ und $[\Theta_0 u, v] = [\Theta_0 v, u]$ ($u, v \in M'$) bestätigt. Außerdem ist für jedes $u, v \in M'$ bei Berücksichtigung von $AP = PA$

$$\begin{aligned} [A_0 \Theta_0 u, v] &= \langle AP\Theta(P'\varphi_u), \varphi_v \rangle = \overline{\langle A\Theta(P'\varphi_u), P'\varphi_v \rangle} \\ &= \overline{\langle A\Theta(P'\varphi_v), P'\varphi_u \rangle} \\ &= \overline{\langle AP\Theta(P'\varphi_v), \varphi_u \rangle} \\ &= \overline{[A_0 \Theta_0 v, u]}. \end{aligned}$$

A_0 ist also ein von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von M .

Satz 1. Jeder Eigenwert von A' ist reell und auch Eigenwert von A . Ist $A' - \lambda I'$ für jedes komplexe λ ein Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$ bezüglich der schwachen Topologie von E' , so ist das kontinuierliche Spektrum von A leer.

Beweis. (a) Θ habe bezüglich A die oben angegebene Bedeutung, λ sei ein Eigenwert von A' . Es gibt dann ein vom Nullelement verschiedenes $u_0 \in E'$ mit $A'u_0 = \lambda u_0$. Da $\langle A\Theta u_0, u_0 \rangle, \langle \Theta u_0, u_0 \rangle$ reell sind und $\langle \Theta u_0, u_0 \rangle \neq 0$ ist, muß λ wegen $\langle A\Theta u_0, u_0 \rangle = \lambda \langle \Theta u_0, u_0 \rangle$ ebenfalls reell sein. Berücksichtigt man diesen Sachverhalt, so folgt aus $A'u_0 = \lambda u_0$ weiter $\Theta(A'u_0) = A\Theta(u_0) = \lambda \Theta(u_0)$. λ ist also auch Eigenwert von A mit dem Eigenelement $\Theta(u_0)$. (b) λ sei kein Eigenwert von A . Da $A' - \lambda I'$ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$ ist, ist $(A - \lambda I)(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von E , der nun mit E zusammenfallen muß, da sonst λ ein Eigenwert von A' , also wegen (a) auch ein Eigenwert von A wäre. $\sigma_k(A)$ ist also leer.

Ist F ein lokalkonvexer Raum und T ein Endomorphismus von F , so heißt T (nach LERAY [5]) vollstetig, wenn es in F eine Nullumgebung V und eine bikompakte Teilmenge B mit $T(V) \subset B$ gibt.

Satz 2. Ist A ein vollstetiger von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus des lokalkonvexen Raumes E , so ist das Spektrum von A reell.

Beweis. Es sei Σ_0 das System aller absolutkonvexen und zugleich bikompakten Teilmengen von E . T_0 sei auf E' die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von Σ_0 . Bei vollstetigem A ist nun auch A' ein vollstetiger Endomorphismus von E' bezüglich der Topologie T_0 (siehe KÖTHE [4], S. 98, Satz 1). Ist λ_0 eine nichtreelle Zahl, so ist nach Satz 1 λ_0 kein Eigenwert von A' , gehört wegen der Vollstetigkeit von A' also auch nicht zum Spektrum von A' . Dann gehört aber λ_0 , wie man sich leicht überlegt, auch nicht zum Spektrum von A .

§ 2. Symmetrisierbare Endomorphismen in Räumen vom Typ (ω)

In diesem Paragraphen sei E ein Raum vom Typ (ω) und A ein stetiger symmetrisierbarer Endomorphismus von E .

Bemerkung 2. Jeder abgeschlossene Teilraum von E ist symmetrisierbar (von 1. Art), jeder Teilraum des mit der schwachen Topologie versehenen dualen Raumes ist symmetrisierbar (von 2. Art).

Beweis. Ist M bzw. N ein abgeschlossener Teilraum von E bzw. ein Teilraum von E' , so gibt es eine stetige Projektion von E auf M bzw. eine schwach stetige Projektion von E' auf N (s. KÖTHE [3], S. 639/640, § 3). Bemerkung 1 liefert dann die Behauptung. Daß E symmetrisierbar von 1. Art ist, entnimmt man der Tatsache, daß es zu jeder Basis $(u_j)_{j \in J}$ von E' eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ von Elementen aus E mit $\langle x_k, u_j \rangle = 0$ ($j, k \in J$; $j \neq k$), $\langle x_j, u_j \rangle = 1$ ($j \in J$) gibt (s. KÖTHE [3], S. 638). Für $u = a_1 u_{j_1} + \dots + a_n u_{j_n}$ aus E' setze man dann $\Theta(u) = \bar{a}_1 x_{j_1} + \dots + \bar{a}_n x_{j_n}$. Wegen $\dim E' < \dim E$ kann E nicht symmetrisierbar von 2. Art sein.

Satz 3. Das kontinuierliche Spektrum von A ist leer.

Beweis. Für jedes komplexe λ ist $(A - \lambda I)(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von E (s. KÖTHE [3], S. 648), d.h. für jedes komplexe λ ist $A' - \lambda I'$ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$. Nach Satz 1 ist daher $\sigma_k(A)$ leer.

Ist F irgendein lokalkonvexer Raum und T ein stetiger Endomorphismus von F , so gilt $\sigma_p(T) \subset \sigma(T')$ und $\sigma_p(T') \subset \sigma(T)$. Ist F vom Typ (ω) , so ist außerdem $\sigma_k(T) \subset \sigma_p(T')$ und $\sigma_k(T') \subset \sigma_p(T)$, so daß dann also auch $\sigma(T) = \sigma(T')$ ist. Ist S ein stetiger Endomorphismus von E und liegt der abzählbare Fall vor (s. Einleitung), so ist das Spektrum von S nicht leer. Das folgt aus den Untersuchungen von ULM [7] (s. Lemma 2 dieser Mitteilung), aber auch sofort aus $\sigma(S) = \sigma(S')$ und aus dem folgenden Lemma, das der Verfasser dieser Note einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. KNESER vom 15.7.55 verdankt.

Lemma 1. F sei ein linearer Raum mit $\dim F = \aleph_0$, T sei ein Endomorphismus von F . Dann ist $\sigma(T)$ nicht leer.

Beweis. Das Spektrum von T sei doch leer. Für jedes Polynom $q(\xi)$ in einer Unbestimmten ξ mit komplexen Koeffizienten, in dem mindestens ein Koeffizient verschieden von 0 ist, existiert dann $(q(T))^{-1}$. Mit C bzw. C_0 wollen wir noch den Körper der komplexen Zahlen bzw. den Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten ξ mit komplexen Koeffizienten bezeichnen. Dem Paar (ψ, x) aus $C_0 \times F$ ordnen wir nun das Element $\psi x = (q(T))^{-1} p(T) x$ aus F zu, wenn $\psi(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$ mit gewissen Polynomen $p(\xi), q(\xi)$ ist. Mit dieser Zuordnung ist jetzt F ein linearer Raum über C_0 . Dann ist (s. BOURBAKI [I], S. 61, prop. 1) $(\psi_k x_j)_{(j,k) \in J \times K}$ eine Basis von F bez. C , falls $(x_j)_{j \in J}$ eine Basis von F bez. C_0 und $(\psi_k)_{k \in K}$ eine Basis von C_0 bez. C ist. Bezeichnen wir allgemein die Mächtigkeit einer Menge L mit $\bar{L}$, so ist also im vorliegenden Fall

$$\dim F = \overline{J \times K} \geq \bar{K} = \bar{C}$$

im Widerspruch mit $\dim F = \aleph_0$. $\sigma(T)$ kann also nicht leer sein. Mit Berücksichtigung von Satz 3 erhält man somit

Satz 4. Im abzählbaren Fall ist das Spektrum des stetigen und symmetrisierbaren Endomorphismus A nicht leer und besteht nur aus Eigenwerten.

Dem nächsten Satz schicken wir das folgende Lemma voraus, das man unmittelbar den Ergebnissen der bereits zitierten ULMschen Arbeit [7] (S. 498, Satz 4) entnimmt. Eine zeilenfinite Matrix $P = (p_{jk})_{j,k=1,2,\dots}$, die wir als einen stetigen Endomorphismus von ω auffassen können, heißt ähnlich zu einer zeilenfiniten Matrix P_0 , wenn es eine ω eineindeutig auf sich abbildende zeilenfinite Matrix Q mit $P = Q^{-1} P_0 Q$ gibt. Für zwei zueinander ähnliche zeilenfinite Matrizen P und P_0 ist $\sigma_p(P) = \sigma_p(P_0)$ und $\sigma_k(P) = \sigma_k(P_0)$. Außerdem ist P_0 genau dann symmetrisierbar (von 1. Art), wenn P symmetrisierbar (von 1. Art) ist.

Lemma 2. Die zeilenfinite Matrix P ist ähnlich zu einer Matrix $D = (d_{jk})$ mit $d_{jk} = 0$ für $j < k$, falls $\sigma(P)$ höchstens abzählbar ist. Ist $\sigma(P)$ überabzählbar, so ist die Menge aller nicht zu $\sigma(P)$ gehörigen λ höchstens abzählbar.

Satz 5. Es sei $\dim E' = \aleph_0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Das Spektrum von A ist reell.
- b) Das Spektrum von A ist höchstens abzählbar.
- c) Jeder Eigenwert von A ist auch Eigenwert von A' .

Beweis. Wir können annehmen, daß E mit dem Folgenraum ω identisch und A eine zeilenfinite Matrix ist. a) $\Rightarrow$ b) $\sigma(A)$ sei reell. Wegen Lemma 2 und $\dim E' = \aleph_0$ ist $\sigma(A)$ höchstens abzählbar. b) $\Rightarrow$ c) $\sigma(A)$ sei höchstens abzählbar. Nach Lemma 2 ist A ähnlich zu einer Matrix $D = (d_{jk})$ mit $d_{jk} = 0$ für $j < k$. Offensichtlich besteht das Spektrum von D' nur aus Eigenwerten, nämlich aus den d_{jj} ($j = 1, 2, \dots$). Also ist $\sigma_k(A') = \sigma_k(D')$ leer und $\sigma_p(A) = \sigma(A') = \sigma_p(A')$. c) $\Rightarrow$ a) Es sei $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A')$. Dann ist $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \sigma_p(A')$ reell nach Satz 1.

Literatur

- [1] BOURBAKI, N.: Algèbre. Chap. II. Actual. Sci. Industr. Nr. 1032. Paris 1947. —
 [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Chap. I—II. Actual. Sci. Industr. Nr. 858—1142.
 Paris 1951. — [3] KÖTHE, G.: Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume
 vom Typus ω . Math. Ann. **120**, 634—649 (1947/49). — [4] KÖTHE, G.: Zur Theorie der
 kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen. Portugaliae Math. **13**, 97—104
 (1954). — [5] LERAY, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme
 complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Scient. Math.
 Szeged **12**, 177—186 (1950). — [6] TOEPLITZ, O.: Über die Auflösung unendlichvieler
 linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Rend. Circ. Matem. Palermo
28, 88—96 (1909). — [7] ULM, H.: Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen. Math.
 Ann. **114**, 493—505 (1937). — [8] WILLIAMSON, J. H.: Spectral representation of linear
 transformations in ω . Proc. Cambridge Philos. Soc. **47**, 461—472 (1951).

Dresden, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 5. April 1956)

Some Remarks on the Infinite Symmetric Groups

By

A. KARRASS and D. SOLITAR

In the infinite symmetric groups we investigate the normalizer of an arbitrary permutation, and the simple factor groups of a composition series given by R. BAER in [1]. We conclude with some topological remarks, and show that if a permutation group is n -ply transitive for each positive integer n then so is any invariant subgroup.

1. PRELIMINARY REMARKS. Let S be an infinite set. Then by the symmetric group on S (denoted Σ_S) we mean the group of all 1—1 mappings of S onto itself. If $|S|$ (the cardinality of S) is p , then $|\Sigma_S| = 2^p$. Let α be a permutation of S (i.e. let $\alpha \in \Sigma_S$), then $M(\alpha)$ (the *moved set* of α) is the set of $x \in S$ such that $x\alpha \neq x$, and $F(\alpha)$ (the *fixed set* of α) is the set of $x \in S$ such that $x\alpha = x$. We say $\alpha, \beta \in \Sigma_S$ are disjoint if $M(\alpha) \cap M(\beta) = \emptyset$ (the empty set). A collection $\{\alpha_i\}$ of permutations of S is called disjoint, if the α_i are disjoint in pairs. Let $\{\alpha_i\}$ be a collection of disjoint permutations. Then we define a permutation of S , called the Π -product of the α_i (denoted $\Pi\alpha_i$), as follows:

$$x\Pi\alpha_i = x\alpha_k \text{ if } x \in M(\alpha_k), \quad x\Pi\alpha_i = x \text{ if } x \in \cap F(\alpha_i).$$

Any permutation α of S can be expressed uniquely as the Π -product of its cycles. These cycles may be finite of the type $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ or $\aleph_0$ infinite of the type $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$. Two permutations are conjugate if and only if they have the same number of cycles (including 1-cycles and infinite cycles) of the same length.

The last remark allows us to compute the class number of Σ_S . Let $|S| = p$ infinite. Let k be the number of cardinals (including finite cardinals) $\leq p$. Let A be a conjugate class of Σ_S . Let n_i denote the number of i -cycles ($1 \leq i \leq \aleph_0$) in any of the permutations of A . Then A is determined by the mapping

$$(1.1) \quad i \rightarrow n_i.$$

Clearly, $n_i \leq p$ and $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = p$. Conversely if $i \rightarrow n_i$ is any mapping of the set $J = 1, 2, \dots, \aleph_0$ into the set K of cardinals not exceeding p and is such that $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = p$, then $i \rightarrow n_i$ is associated with some conjugate class. Clearly the number of these particular mappings of J into K does not exceed $k^{\aleph_0}$ (the total number of mappings of J into K). Next consider the mappings of J into K defined by $n_1 = p, n_i = \text{any cardinal} \leq p \ (1 < i)$. Clearly $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = p$.

The number of these mappings of J into K is $k^{\aleph_0}$. Thus the class number of Σ_S is $k^{\aleph_0}$. In particular if $p = \aleph_0$ or $p = c$, then the class number of Σ_S equals c .

We next give another application of the same remark. We shall prove by permutation techniques a result in [2] which states:

(1.2) If G is a group, then we can imbed G in a group G' in such a way that any two elements of G of the same order are conjugate in G' .

Let H be any group, and $a \in H$. Then by right multiplication of H by a (denoted R_a) we mean the permutation of H given by $x \rightarrow xa$, $x \in H$. The group R_H of all right multiplications of H is a regular permutation group on the set of elements of H , and the mapping: $a \rightarrow R_a$ gives an isomorphism of H onto R_H . To prove (1.2), let G be a group. Embed G in a non-countable group H . Let $p = |H|$. Suppose a, b are in H and have the same order t . Consider R_H . Now R_a when factored into cycles consists of only t -cycles, and since $t \leq \aleph_0 < p$, these must be p in number. Similarly for R_b . Hence R_a and R_b are conjugates in Σ_H .

2. THE NORMALIZER OF A PERMUTATION. Let G be a subgroup of Σ_S . Then by the *moved set* of G we mean $\cup M(\alpha_i)$, $\alpha_i \in G$. Let $\{G_i\}$ be a disjoint collection of subgroups of Σ_S (i.e., any two of their moved sets are disjoint). Then by the Π -product ΠG_i of this collection we mean the set of all $\Pi \alpha_i$ where $\alpha_i \in G_i$. Now ΠG_i is a subgroup of Σ_S and is isomorphic to the unrestricted direct product of the G_i (for, consider the mapping $(\dots, \alpha_i, \dots) \rightarrow \Pi \alpha_i$).

We next mention a simple consequence of the preceding remark. We know by CAYLEY's theorem and the fact that $|S| = |T|$ implies $\Sigma_S \simeq \Sigma_T$, that every group of cardinality $\aleph_0$ can be embedded in Σ_S where S is a countable set. Partition S into a countable union of countable sets $S = \cup S_i$. Let G_i be the subgroup of Σ_S consisting of all α such that $M(\alpha) \subset S_i$. Clearly $G_i \simeq \Sigma_{S_i}$, and so since S_i is countable, we have that G_i contains a copy Q_i of the additive group of rationals. The Q_i are disjoint in Σ_S , and so Σ_S contains ΠQ_i which is isomorphic to Q' , the unrestricted countable direct product of the additive group of rationals. Now Q' and the additive group of reals may be considered vector spaces over the field of rationals and as such both have dimension c . Hence they are isomorphic. Thus Σ_S , S countable, contains a copy of the additive group of reals.

Notation. Let $\alpha \in \Sigma_S$. Then N_α = the normalizer of α ; D_α = the set of all permutations in Σ_S disjoint from α ; $\langle \alpha \rangle$ = the cyclic group generated by α . Thus if $\alpha = \Pi \alpha_i$ is the factorization of α into disjoint cycles, $\Pi \langle \alpha_i \rangle$ denotes the Π -product of the cyclic groups generated by the cycles of α . The following two lemmas are easily proved.

LEMMA 1. Let $\alpha = \Pi \alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Then both D_α and $\Pi \langle \alpha_i \rangle$ are invariant subgroups of N_α , and they have only the identity permutation I in common.

LEMMA 2. Let $\alpha = \Pi \alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Then β commutes with each cycle α_i of α if and only if $\beta \in D_\alpha \Pi \langle \alpha_i \rangle$.

THEOREM 1. *Let $\alpha = \prod \alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Let n_i denote the number of i -cycles ($1 \leq i \leq \aleph_0$) of α . Then N_α is a splitting extension of $D_\alpha \prod \langle \alpha_i \rangle$ by the unrestricted direct product of Σ_{S_i} where $|S_i| = n_i$.*

PROOF. Clearly the unrestricted direct product of Σ_{S_i} where $|S_i| = n_i$ is isomorphic to the group L of 1-1 mappings of the collection of cycles $\{\alpha_i\}$ onto itself which preserve the length of a cycle. Let $\beta \in N_\alpha$. Consider the mapping l_β of the cycles $\{\alpha_i\}$ given by $\alpha_i \rightarrow \beta^{-1} \alpha_i \beta$. Now $l_\beta \in L$. Consider next the mapping of N_α given by $\beta \rightarrow l_\beta$. This is easily seen to be a homomorphism of N_α into L . Now $\beta \in \text{kernel}$ if and only if l_β equals the identity, if and only if $\beta^{-1} \alpha_i \beta$ equals α_i for each α_i . Thus by Lemma 2, the kernel equals $D_\alpha \prod \langle \alpha_i \rangle$. We now construct a representative system for $N_\alpha / D_\alpha \prod \langle \alpha_i \rangle$ which also forms a subgroup of N_α . To each α_i associate a specific cyclic representation for it. These will be of the form $(x_1, \dots, x_i)$ or $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. For each element l of L define a mapping β as follows: If $l(\alpha_i) = (y_1, \dots, y_i)$ or $(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ let $x_i \beta = y_i$; if on the other hand $x \in F(\alpha)$, let $x \beta = x$. It is easily seen that $\beta^{-1} \alpha \beta = \alpha$, and so $\beta \in N_\alpha$, and that $l_\beta = l$. (Thus our homomorphism is onto L .) Moreover these β 's form a group. For let $\beta, \bar{\beta}$ be of the given form and associated with $l, \bar{l}$ respectively. Then $\beta \bar{\beta}$ will be associated with $l \bar{l}$ and β^{-1} will be associated with l^{-1} .

Thus, for example, if S is the set of integers, and $\alpha = (\dots, -2, 0, 2, 4, \dots)$ $(\dots, -3, -1, 1, 3, \dots)$, then $N_\alpha = \langle \beta \rangle \langle \gamma \rangle \langle \delta \rangle$ where $\beta = (\dots, -2, 0, 2, 4, \dots)$, $\gamma = (\dots, -3, -1, 1, 3, \dots)$ and $\delta = \dots(-2, -1)(0, 1)(2, 3)\dots$.

COROLLARY 1. If no two cycles of α have the same length and $M(\alpha) = S$, then $N_\alpha = \prod \langle \alpha_i \rangle$. In particular if α is a cycle and $M(\alpha) = S$, and β commutes with α , then $\beta = \alpha^k$ for some k .

3. INVARIANT SUBGROUPS OF Σ_S . Throughout this section let S be a given set of infinite cardinality p .

If q is an infinite cardinal, then the set S_q of all $\alpha \in \Sigma_S$ which move fewer than q elements [i.e., the α such that $|M(\alpha)| < q$] is an invariant subgroup of Σ_S , which we call the q -restricted symmetric group on S . It is not difficult to show that if α and β are conjugate in Σ_S and $\alpha, \beta \in S_q$, then α, β are conjugate in S_q . This is used in the proof of the second part of

THEOREM 2. *The only invariant subgroups of Σ_S are I , the alternating group A_S on S , and the various S_q , q infinite. Also the only invariant subgroups of S_q are I , A_S , and the various S_r with $r \leq q$.*

PROOF. This theorem was proved for the case where S is countable by SCHREIER and ULAM [4] and extended to the general case by BAER [1].

Notation. Let m be an infinite cardinal. Then we use m^* to denote the immediate successor of m .

THEOREM 3. *Let $q \leq p$. Then the factor group S_{q^*}/S_q is simple, has order p^q , and contains copies of all groups of order q . In particular S_{p^*}/S_p is simple, of order 2^p , and contains copies of all groups of order p .*

PROOF. From Theorem 2 it is clear that S_q is maximal invariant in S_{q^*} . For if $S_{q^*} > S_r > S_q$, then $q^* \geq r \geq q$, and so $r = q$ or $r = q^*$. Consequently, S_{q^*}/S_q is simple. In order to calculate $|S_{q^*}/S_q|$ we use the following.

LEMMA. Suppose $|S| = p$ infinite, and $q \leq p$. Then the number of subsets of S of cardinality q equals the number of subsets of S with cardinality $\leq q$, equals p^q .

To show $|S_{q^*}/S_q| = p^q$, we first observe that $|S_{q^*}| \leq p^q$. For, each element of S_{q^*} is determined by its moved set and the effect it has on its moved set. Since there are p^q possible moved sets for an element in S_{q^*} , and there are at most 2^q permutations of such a moved set, we have $|S_{q^*}| \leq p^q \cdot 2^q = p^q$. Therefore $|S_{q^*}/S_q| \leq p^q$. To show the reverse, divide S into p disjoint subsets each of cardinality q . Consider all subcollections of this partition which contain q or fewer of these partitioning sets. We then have p^q such subcollections. Associate to each of these subcollections a permutation $\alpha \in \Sigma_S$ whose moved set is the union of the partitioning sets in the subcollection. Then $\alpha \in S_{q^*}$. Let β be another associated permutation. Then either α moves some partitioning set which β does not or vice versa. Therefore either $\alpha\beta^{-1}$ or $\beta\alpha^{-1}$ moves some partitioning set. Hence $\alpha\beta^{-1}$ or $\beta\alpha^{-1} \notin S_q$. Consequently $|S_{q^*}/S_q| \geq p^q$.

Let G be any group of cardinality q . Let $\bar{S}$ be a subset of S of cardinality q . Then we can define a multiplication on $\bar{S}$ in such a way that $\bar{S}$ will be a group isomorphic to G . It then follows from CAYLEY'S Theorem that G can be embedded in $\Sigma_{\bar{S}}$ as a regular permutation group $\bar{G}$ on $\bar{S}$. Extend each $\alpha \in \bar{G}$ to all of S by defining α to be the identity on the complement of $\bar{S}$. We then have G embedded in Σ_S as G' in such a way that the permutations in G' other than the identity have moved set of cardinality $|\bar{S}| = q$. Therefore G' is a subgroup of S_{q^*} and $G' \cap S_q = I$. Consequently the mapping: $\alpha \rightarrow \alpha S_q$, $\alpha \in G'$, is an isomorphism of G' into S_{q^*}/S_q .

To complete the proof of Theorem 3 we observe that $p^p = 2^p$.

Thus, there is associated to the infinite symmetric group Σ_S on S , the infinite simple groups S_{q^*}/S_q . None of these are isomorphic to an alternating group (since all the elements of an alternating group have finite order, whereas the coset of a product of q disjoint infinite cycles has infinite order). The question arises: when will S_{q^*}/S_q and S_{r^*}/S_r be non-isomorphic? Clearly if $p^q \neq p^r$, then by Theorem 3, they will be non-isomorphic. We show in Theorem 4 that if we reduce the whole symmetric group $\Sigma_S (= S_p^*)$ by its maximal invariant subgroup S_p , then the resulting factor group will be non-isomorphic to S_{q^*}/S_q , $q < p$.

THEOREM 4. If $q < p$ then S_{p^*}/S_p is not isomorphic to S_{q^*}/S_q .

LEMMA. If $q < p$ then any two elements of S_{q^*}/S_q of the same prime order are conjugate.

PROOF. Let n be a prime, and let $\alpha S_q, \beta S_q$ both be of order n in S_{q^*}/S_q . Let $\alpha = (II\alpha_j)(II\alpha_{j'})$ be the factorization of α into disjoint cycles, where the length of each α_j equals n , and the length of each $\alpha_{j'}$ is different from n . Then $\alpha^n = (II\alpha_j^n)(II\alpha_{j'}^n) = II\alpha_{j'}^n \in S_q$. Now $\alpha_{j'}^n \neq I$, and so $M(\alpha_{j'}^n) = M(\alpha_{j'})$.

Therefore $M(\Pi\alpha_j) = M(\Pi\alpha_j^n)$, and so $\Pi\alpha_j \in S_q$. Hence $\alpha S_q = (\Pi\alpha_j) S_q$. Clearly $\Pi\alpha_j$ is not in S_q , and so consists of q n -cycles and has fixed set of cardinality p . Similarly, $\beta S_q = (\Pi\beta_j) S_q$, where $\Pi\beta_j$ consists of q n -cycles and has fixed set of cardinality p . Therefore $\Pi\alpha_j = \lambda^{-1}(\Pi\beta_j)\lambda$ where $\lambda \in S_{q^*}$ (by the remark preceding Theorem 2), and consequently $\alpha S_q, \beta S_q$ are conjugates in S_{q^*}/S_q .

To prove Theorem 4, it therefore suffices to produce two elements of S_{p^*}/S_p of the same prime order which are not conjugate in S_{p^*}/S_p . For this purpose let n be a prime, let $\alpha = \Pi\alpha_i$ be the product of p disjoint n -cycles such that $|F(\alpha)| = p$, and let $\beta = \Pi\beta_i$ be the product of p disjoint n -cycles such that $F(\beta) = \emptyset$. Suppose αS_p and βS_p were conjugate in S_{p^*}/S_p . Then there would exist a $\lambda \in S_{p^*} (= \Sigma_S)$ and a $\sigma \in S_p$ for which $\beta = (\lambda^{-1}\alpha\lambda)\sigma$. But then $|F(\beta)| = |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda\sigma)| \geq |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)|$. Since

$$|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda)| = |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)| + |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap M(\sigma)|$$

and $\sigma \in S_p$ (so that $|M(\sigma)| < p$), and also $|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda)| = |F(\alpha)| = p$, we must have $|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)| = p$. Consequently, $|F(\beta)|$ would equal p , contrary to our construction of β .

4. TOPOLOGICAL REMARKS. We next introduce a topology on Σ_S which is non-discrete if S is infinite, and under which Σ_S is a topological group. Let $\{E_j\}$ be the collection of all finite (non-empty) subsets of S , and α be in Σ_S . Then by the E_j -neighborhood of α we mean all β in Σ_S such that β agrees with α on E_j . We call this topology the finite set topology on Σ_S . It is clear that the E_j -neighborhood of I is the subgroup $\cup_j$ of Σ_S leaving E_j pointwise fixed, and, the E_j -neighborhood of α is the coset $\cup_j \alpha$. Σ_S is a zero-dimensional topological group under its finite set topology. If S is countable then this topology can be induced by a metric (the BAIRE metric) as follows: Label the elements of S as $1, 2, 3, \dots$, and view the elements of Σ_S as sequences. Define the distance between two distinct sequences to be $1/k$ where the k -th place is the first one at which they differ. If S is not countable, then Σ_S is not metrizable, since Σ_S in this case does not satisfy the first axiom of countability.

A subset H of Σ_S is dense under the finite set topology if and only if H is n -ply transitive on S for each positive integer n . In particular A_S and $S_{\aleph_0}$ are dense. Thus, if S is countable $S_{\aleph_0}$ is also and so Σ_S is separable. In fact, if we represent the elements of S by the integers $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ we see easily that the subgroup of Σ_S generated by the transposition $(0, 1)$ and the infinite cycle $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ contains all transpositions and hence $S_{\aleph_0}$, so that Σ_S contains a dense subgroup generated by two elements. (Incidentally we have here a simple example of a finitely generated group which contains a non-finitely generated subgroup. That $S_{\aleph_0}$ is not finitely generated is clear since the moved set of a product is contained in the union of the moved sets of the factors.)

It is clear that any subgroup containing A_S is dense. Suppose D is a dense subgroup of Σ_S (or equivalently D is an n -ply transitive group on S for each n) and D contains a finite permutation $\alpha \neq I$, then $D > A_S$. For

suppose $\alpha = (a_1 \dots a_k) \dots (a_{j+1} \dots a_r)$. Find a λ in D leaving $a_1, \dots, a_{r-1}$ fixed and sending a_r into b where b is different from each a_i moved by α . Then $\alpha^{-1}\lambda^{-1}\alpha\lambda = (a_{j+1}a_rb)$. Hence D contains all 3-cycles and so contains A_S .

Finally, we have:

THEOREM 5. Any invariant subgroup $H (\neq I)$ of a dense subgroup D is itself dense.

LEMMA. Let $H (\neq I)$ be an invariant subgroup of a dense subgroup D . Then I is a limit point of H , i.e., given any finite subset E_j of S , there exists an $\alpha \in H (\alpha \neq I)$, such that α leaves E_j pointwise invariant.

PROOF. It is easily seen that H is transitive. Suppose that for each $\alpha \in H (\alpha \neq I)$, we had $M(\alpha) = S$. Then H would have to be regular. Let $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (distinct and $\neq I$), and $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (distinct and $\neq I$) be in H . Then there would exist a $\lambda \in D$ such that $\lambda^{-1}\alpha_i\lambda = \beta_i$ ($i=1, 2, 3$). (For let $x \in S$ and $x\alpha_i = a_i$, $x\beta_i = b_i$. Choose $\lambda \in D$ leaving x fixed and sending a_i into b_i .) In particular all elements of H would have the same order. If this common order were different from two, then H would have order three (for there would exist an automorphism of H sending α into α and β into α^2); if this common order were two, H would have order four (for there would exist an automorphism sending α into α , β into β , and γ into $\alpha\beta$). Consequently since H is infinite, we must have an $\alpha \in H (\alpha \neq I)$ which leaves some element of S fixed. Clearly this fixed element can be chosen arbitrarily. Let $x \in S$, and D_x the subgroup of permutations of D leaving x fixed. Then $H_x = H \cap D_x$ is different from I and is invariant in D_x . Viewing D_x as permutations of $S - \{x\}$ and applying the above argument, we have that H has an $\alpha (\neq I)$ leaving a given two symbols fixed. Proceeding in this way we have the lemma.

To prove the theorem we use induction, showing that H is n -ply transitive for each n . Since H is transitive, we have the case when $n=1$. Suppose H is r -ply transitive. Let $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ (distinct) and $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$ (distinct) be in S . By the inductive hypothesis there exists a $\lambda \in H$ such that $a_i\lambda = b_i$, $i=1, \dots, r$. Let $d\lambda = b_{r+1}$. Then $d \neq a_i$ ($i=1, \dots, r$). Now $H' = H \cap D_{\{a_1, \dots, a_r\}}$ (where $D_{\{a_1, \dots, a_r\}}$ are the permutations in D leaving $\{a_1, \dots, a_r\}$ pointwise fixed) is an invariant subgroup of $D_{\{a_1, \dots, a_r\}}$ and different from I by the above lemma. Therefore H' is transitive on the complement of $\{a_1, \dots, a_r\}$ in S . In particular there exists an $\alpha \in H'$ with $a_{r+1}\alpha = d$, so that $\alpha\lambda \in H$ and sends a_i into b_i , $i=1, \dots, r, r+1$.

Bibliography

[1] BAER, R.: Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich. *Studia Math.* **5**, 15--17 (1934). — [2] HIGMAN, G., B. H. NEUMANN and H. NEUMANN: Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.* **24**, 247—254 (1949). — [3] KUROSH, A. G.: The Theory of Groups, vol. 1. New York (Chelsea) 1955. — [4] SCHREIER, J., and S. ULAM: Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge. *Studia Math.* **4**, 134—141 (1933).

Inst. of Math. Sciences, New York University, New York 3, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 22. März 1956)

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

Inhalt

Kap. I. Zum Eindeutigkeitsprinzip der Charakteristikentheorie.	70
§ 1. Problemstellung S. 70. — § 2. Satz 1 S. 71. — § 3. Beweis des Satzes 1 S. 74.	
Kap. II. Eine Verschärfung des Involutionprinzips	75
§ 4. Problemstellung S. 75. — § 5. Formulierung und Beweis des Satzes 2 S. 76.	
Kap. III. Zum Existenzprinzip der Charakteristikentheorie	76
§ 6. Problemstellung S. 76. — § 7. Diskussion der Fragestellung S. 78. — § 8. Formulierung des Satzes 3 S. 79. — § 9. Ein Lemma über die GREENSche Umformung S. 79. — § 10. Zwei Lemmata über Integralapproximationen S. 80. — § 11. Beginn des Beweises von Satz 3 S. 82. — § 12. Zuendeführung des Beweises von Satz 3 S. 83. — § 13. Schlußbemerkungen und Beispiele S. 85.	

Kap. I. Zum Eindeutigkeitsprinzip der Charakteristikentheorie

§ 1. Problemstellung

Die CAUCHYSche Charakteristikentheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \quad F(z, p, q, x, y) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

beruht unter anderem auf dem folgenden Prinzip, das wir als *Eindeutigkeitsprinzip* bezeichnen wollen:

Wird eine Integralfläche $z = \varphi(x, y)$ der Differentialgleichung (1) von einem Flächenelement

$$(2) \quad z^0, p^0, q^0, x^0, y^0$$

tangiert, so wird sie auch von dem ganzen durch (2) bestimmten charakteristischen Streifen der Differentialgleichung (1) tangiert.

Dieses Prinzip wird in den klassischen Darstellungen der CAUCHYSchen Theorie unter der Annahme der Analytizität von F und φ exakt bewiesen¹⁾. Im reellen Gebiet dürfte als erster W. Gross²⁾ eine Fassung des Eindeutigkeitsprinzips bewiesen haben.

¹⁾ Vgl. GOURSAT, E.: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 2. éd., pp. 170—172. 1921.

²⁾ Gross, W.: *Bemerkungen zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*. Sitzgsber. der Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl., Wien, Abt. IIa 123, 2233—2251 (1914).

Die einfachste und zugleich bisher schärfste Formulierung verdankt man E. KAMKE³⁾, der das Eindeutigkeitsprinzip unter der Annahme der *zweimal stetigen Differenzierbarkeit* von q und der *einmal stetigen Differenzierbarkeit* von F bewiesen hat.

Was die über $q(x, y)$ zu machenden Voraussetzungen anbetrifft, so hat sich anscheinend in der Literatur die Ansicht festgewurzelt, daß man unter die Annahme der zweimal stetigen Differenzierbarkeit nicht herunterkommen kann. So sagt z. B. A. HAAR 1928 in einem Vortrag auf dem Mathematikerkongreß in Bologna: „Diese zweimalige Differenzierbarkeit ist dabei unerläßlich, da der Satz, daß jede Lösung von (1) von Charakteristiken umspunnen wird, nur für zweimal differenzierbare Lösungen abgeleitet werden kann⁴⁾.“

Im folgenden soll nun vor allem eine hinsichtlich der Voraussetzungen über q schärfere Formulierung des Eindeutigkeitsprinzips bewiesen werden, bei der über q im wesentlichen nur vorausgesetzt wird, daß die ersten Ableitungen von q einer LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung α , $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, genügen, wofür dann allerdings über F vorauszusetzen ist, daß die ersten Ableitungen von F in bezug auf p und q eine LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung $> \frac{1}{\alpha} - 1$ befriedigen. Damit gelingt es, die Forderung der zweimaligen Differenzierbarkeit von q abzuschwächen. Die über F zu machenden Annahmen treffen auf jeden Fall zu, wenn z. B. F zweimal stetig differenzierbar ist.

§ 2. Formulierung des Satzes

Um unseren Satz genau formulieren zu können, wollen wir allgemein von einer Funktion $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sagen, sie gehöre in einem bestimmten y -Gebiete G zur Klasse L_α in bezug auf die y_v , wenn für ein gewisses C , das nur von f und G abhängt, die Ungleichung

$$|f(y_v) - f(y'_v)| \leq C \left(\sum_v |y_v - y'_v| \right)^\alpha$$

gilt, für alle Punktepaare $(y_v), (y'_v)$ aus G . Hängt f noch von gewissen Parametern ab, die sich in geeigneten Wertebereichen bewegen, so ist klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_v zur Klasse L_α *gleichmäßig* in bezug auf jene Parameter.

Andererseits werden wir sagen, f gehöre in G zur Klasse l_α in bezug auf die y_v , wenn für jedes positive ε für beliebige Punktepaare $(y_v), (y'_v)$ aus G die Relation gilt:

$$|f(y_v) - f(y'_v)| \leq \varepsilon \left(\sum_v |y_v - y'_v| \right)^\alpha,$$

³⁾ KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, 2. Aufl., pp. 351–352. Leipzig 1930.

⁴⁾ HAAR, A.: Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen. Atti Congr. Internaz. Matemat., Bologna **3**, 5–10 (1928), insbesondere p. 6 oben. Vgl. auch HAAR, A.: Zur Charakteristikentheorie. Acta litterarum ac scientiarum regiae univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, sect. scientiarum mathematicarum, Szeged **4**, 106–114 (1928), sowie die Note in den Comptes Rendus **187**, 23–25 (1928), A. HAAR, Sur l'unicité des solutions etc.

sobald $\sum_v |y_v - y'_v|$ klein genug geworden ist, $< \delta(\varepsilon)$. Auch hier ist klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_v zur Klasse l_v *gleichmäßig* in gewissen Parametern.

Die Klasse l_0 ist offenbar die Klasse der in G stetigen Funktionen in bezug auf die y_v .

Um nun die obigen LIPSCHITZ-Klassen zu verallgemeinern, wollen wir im folgenden eine Funktion $\psi(\varrho)$ als einen LIPSCHITZ-Modul bezeichnen, wenn sie für hinreichend kleine $\varrho \geq 0$ definiert und stetig ist und für monoton gegen 0 abnehmende ϱ selbst monoton gegen 0 abnimmt. Wir sagen dann, wenn die Relation

$$|f(y_v) - f(y'_v)| \leq C \psi\left(\sum_v |y_v - y'_v|\right)$$

für ein gewisses C für alle Punktepaaire $(y_v), (y'_v)$ aus G erfüllt ist, daß f in G zur Klasse L_ψ gehört. Gilt aber diese Relation für jedes noch so kleine positive C , sobald $\sum_v |y_v - y'_v|$ hinreichend klein geworden ist, so sagen wir, f gehöre in G zur Klasse l_ψ . Und es ist wiederum klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_v zur Klasse L_ψ bzw. l_ψ *gleichmäßig* in gewissen Parametern.

Wir werden im folgenden neben dem LIPSCHITZ-Modul $\psi(\varrho)$ noch einen zweiten LIPSCHITZ-Modul $\Psi(\varrho)$ betrachten, der erstens die Eigenschaft besitzt, daß für jede positive Konstante c

$$(a) \quad \Psi(c\varrho) = 0 \{\Psi(\varrho)\} \quad (\varrho \downarrow 0)$$

gilt; zweitens der Bedingung genügt

$$(b) \quad \varrho = 0 \{\Psi(\varrho)\} \quad (\varrho \downarrow 0);$$

und endlich mit $\psi(\varrho)$ durch die Funktionalrelation

$$(c) \quad \psi \Psi(\psi) = 0(\varrho) \quad (\varrho \downarrow 0)$$

verknüpft ist. Wir werden dann sagen, Ψ sei ein zu ψ komplementärer LIPSCHITZ-Modul⁵⁾. Aus der Relation (b) folgt dann offenbar, daß $\psi = 0 \{\Psi(\psi)\}$, $\psi^2 = 0 \{\psi \Psi(\psi)\}$ und daher wegen (c)

$$(d) \quad \psi(\varrho) = 0(\varrho^{\frac{1}{2}}) \quad (\varrho \downarrow 0)$$

gilt. Zum Beispiel könnte $\psi(\varrho)$ die Gestalt

$$(e) \quad \psi(\varrho) = \varrho^\alpha \lg^{\alpha_1} \frac{1}{\varrho} \lg^{\alpha_2} \frac{1}{\varrho} \dots \lg^{\alpha_n} \frac{1}{\varrho}$$

⁵⁾ Die Bedingung (b) ergibt sich übrigens zwangsläufig, wenn die zugehörige LIPSCHITZ-Klasse L_Ψ oder l_Ψ nichtkonstante Funktionen überhaupt enthält.

Wäre nämlich dann für eine gegen 0 fallende Zahlenfolge $\varrho_v: \frac{\Psi(\varrho_v)}{\varrho_v} \rightarrow 0$, so würde daraus folgen, daß in bezug auf jede einzelne Variable z.B. die beiden rechtsseitigen derivierten Zahlen einer Funktion f aus der Klasse L_Ψ in jedem Punkte jener Umgebung die Null zwischen sich enthalten. Dann wäre aber f nach den Sätzen von DINI in dieser Umgebung überhaupt konstant.

haben und $\Psi(\varrho)$ ein analoger Ausdruck sein, wobei dann zu verlangen wäre, daß

$$(f) \quad \Psi(\varrho) = 0 \left(\varrho^{\frac{1}{\alpha}-1} \lg^{-\frac{\alpha_1}{\alpha}} \frac{1}{\varrho} \dots \lg_n^{-\frac{\alpha_n}{\alpha}} \frac{1}{\varrho} \right) \quad (\varrho \downarrow 0)$$

gilt. Die einfachsten Beispiele sind $\psi(\varrho) = \varrho^\alpha$, $\Psi(\varrho) = \varrho^{\alpha-1}$ ($\alpha \geq \frac{1}{2}$).

Unsere Fassung des Eindeutigkeitsprinzips läßt sich nun im folgenden Satze formulieren:

Satz 1. *Es sei*

$$(3) \quad z = \varphi(x, y)$$

eine in einer Umgebung U_1 des Punktes (x^0, y^0) einmal stetig differenzierbare Funktion, und es werde gesetzt

$$(4) \quad \begin{cases} p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ z^0 = \varphi(x^0, y^0), & p^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0, y^0), & q^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^0, y^0). \end{cases}$$

Es sei $F(z, p, q, x, y)$ eine in einer Umgebung U_2 der Punkte $(z^0, p^0, q^0, x^0, y^0)$ differenzierbare Funktion, für die in U_2 die fünf Größen

$$(5) \quad F_z', F_p', F_q', F_x', F_y'$$

stetig sind, und es sei die Gleichung (1) für die durch (3) und (4) gegebenen Werte von z, p, q für alle x, y aus U_1 erfüllt.

Es sei ferner $\psi(\varrho)$ ein der Bedingung (d) genügender LIPSCHITZ-Modul, der einen komplementären LIPSCHITZ-Modul $\Psi(\varrho)$ besitzt, und es möge eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:

A. $p(x, y), q(x, y)$ gehören in U_1 zur Klasse l_ψ in bezug auf die x, y ; ferner gehören F_p', F_q' zur Klasse L_ψ in bezug auf die p, q aus U_2 gleichmäßig in z, x, y aus U_2 .

B. $p(x, y), q(x, y)$ gehören in U_1 zur Klasse L_ψ in bezug auf die x, y ; ferner gehören F_p', F_q' zur Klasse l_ψ in bezug auf die p, q aus U_2 gleichmäßig in z, x, y aus U_2 .

Dann besitzt das System der fünf Differentialgleichungen

$$(6) \quad z' = pF_p' + qF_q', \quad -p' = F_z' + pF_x', \quad -q' = F_y' + qF_x', \quad x' = F_p', \quad y' = F_q'$$

mit der unabhängigen Variablen t , wo die Striche ohne unteren Index die Differentiationen nach t bedeuten, eine in der Umgebung von $t=0$ aus fünf stetig differenzierbaren Funktionen

$$(7) \quad z(t), p(t), q(t), x(t), y(t)$$

bestehende Lösung, wobei die Funktionen (7) in einer Umgebung von $t=0$ die Relationen (3) und (4) erfüllen und sich für $t=0$ auf die Zahlen z^0, p^0, q^0, x^0, y^0 reduzieren.

§ 3. Beweis des Satzes 1

Beweis. Das System der Differentialgleichungen

$$(8) \quad \begin{cases} x'(t) = F_p'(\varphi(x, y), \varphi_x'(x, y), \varphi_y'(x, y), x, y), \\ y'(t) = F_q'(\varphi(x, y), \varphi_x'(x, y), \varphi_y'(x, y), x, y) \end{cases}$$

ist für hinreichend kleine t mit den Anfangsbedingungen $x'(0) = x^0$, $y'(0) = y^0$ auflösbar und liefert eine stetig differenzierbare Kurve durch (x^0, y^0) in der x - y -Ebene⁶⁾. Die entsprechenden Werte von φ , φ_x' , φ_y' seien mit $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$ bezeichnet.

Aus $z(t) = \varphi(x(t), y(t))$ folgt durch Differentiation $z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$ oder

$$(9) \quad z' = pF_p' + qF_q'.$$

Im folgenden sind z, p, q, x, y Werte dieser Funktionen für absolut hinreichend kleines t . Wir erteilen x einen beliebigen Zuwachs h und bezeichnen die zugehörigen Zuwächse von $z(x, y)$, $p(x, y)$ und $q(x, y)$ bzw. mit k, π und κ :

$$(10) \quad \begin{cases} k = \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y), & \pi = p(x + h, y) - p(x, y), \\ \kappa = q(x + h, y) - q(x, y). \end{cases}$$

Dann folgt aus (1)

$$[F(z, p + \pi, q + \kappa, x, y) - F(z, p, q, x, y) + \\ + F(z + k, p + \pi, q + \kappa, x + h, y) - F(z, p + \pi, q + \kappa, x, y)] = 0.$$

In der ersten eckigen Klammer wenden wir den Mittelwertsatz auf die beiden Variablen p und q an. In der zweiten Klammer wird für konstante p, q, π, κ, y der Mittelwertsatz angewandt auf x als unabhängige Variable, wobei z als Funktion $\varphi(x, y)$ von x aufgefaßt wird, da dann der h entsprechende Zuwachs von z gleich k ist. Dann ergibt sich

$$(11) \quad \begin{cases} [\pi F_p' + \kappa F_q'](z, p + \vartheta\pi, q + \vartheta\kappa, x, y) + \\ + h[F_x' + p^*F_x'](\varphi(x + \vartheta_1 h, y), p + \pi, q + \kappa, x + \vartheta_1 h, y) = 0, \end{cases}$$

wo ϑ und ϑ_1 zwischen 0 und 1 liegen und $p^* = \varphi_x'(x + \vartheta_1 h, y)$ ist.

Ersetzen wir hier p^* durch p und die übrigen Argumente bzw. durch p, q, x, y , so ist das Korrekturglied im ersten Term links wegen (c) im Falle der Annahme A

$$O\{(|\pi| + |\kappa|) \Psi(|\pi| + |\kappa|)\} = o\{\psi(|h|) \Psi(\psi(|h|))\} = o(h)$$

und im Falle der Annahme B

$$o\{(|\pi| + |\kappa|) \Psi(|\pi| + |\kappa|)\} = o\{\psi(|h|) \Psi(\psi(|h|))\} = o(h).$$

Im zweiten Glied rechts in (11) folgt aus der Stetigkeit von F_x' , p , F_x' , daß das Korrekturglied gleichfalls $o(h)$ ist. Daher folgt nach der Division durch h ,

⁶⁾ Vgl. z. B. KAMKE, E.: 1. c. pp. 126—130.

wenn F'_p, F'_q, F'_x, F'_y wieder im Punkte (z, p, q, x, y) genommen werden, wegen (8) und (10):

$$(12) \quad (p(x+h, y) - p(x, y)) \frac{x' + (q(x+h, y) - q(x, y)) y'}{h} = (F'_x + p F'_z) + \varepsilon(h),$$

wo $\varepsilon(h)$ mit $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in t gegen 0 konvergiert. Der Ausdruck links ist aber gleich

$$\left[\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} \right]_t.$$

Integriert man daher beide Seiten von (12) nach t von 0 bis t , so folgt

$$(13) \quad \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} = \frac{\varphi(x^0+h, y^0) - \varphi(x^0, y^0)}{h} = - \int_0^t (F'_x + p F'_z) dt + t \varepsilon_1(h),$$

wo $\varepsilon_1(h)$ mit $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in t gegen 0 strebt.

Für $h \rightarrow 0$ folgt weiter aus (13)

$$p(x, y) - p(x^0, y^0) = p(t) - p(0) = - \int_0^t (F'_x + p F'_z) dt$$

und daher durch Differentiation nach t

$$(14) \quad p'(t) = -(F'_x + p F'_z).$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$(15) \quad q'(t) = -(F'_y + q F'_z).$$

Die Differentialgleichungen (8), (9), (14) und (15) sind aber gerade die Differentialgleichungen (6) des charakteristischen Streifens, womit der Satz 1 bewiesen ist.

Kap. II. Eine Verschärfung des Involutionsprinzips

§ 4. Problemstellung

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Formulierung des Eindeigkeitsprinzips läßt sich auch die übliche Formulierung der folgenden Tatsache verschärfen, die wir als *Involutionsprinzip* bezeichnen wollen:

Genügt $z = \varphi(x, y)$ den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(z, p, q, x, y) = 0, \quad G(z, p, q, x, y) = 0,$$

so ist für z auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$(16) \quad \begin{cases} [F, G] \equiv F'_p (G'_x + p G'_z) - G'_p (F'_x + p F'_z) + \\ \quad + F'_q (G'_y + q G'_z) - G'_q (F'_y + q F'_z) = 0. \end{cases}$$

Bei den üblichen Beweisen dieser Tatsache⁷⁾ wird über F und G die Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen und über $\varphi(x, y)$ die Stetigkeit

⁷⁾ Vgl. KAMKE, E.: l. c. pp. 364—365.

der ersten und zweiten partiellen Ableitungen vorausgesetzt. Wir beweisen nun, daß (3) gilt, wenn über φ und etwa F die zu unserem Beweis des Eindeutigkeitsprinzips notwendigen Annahmen gemacht werden, während über G nur die Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen vorausgesetzt wird.

§ 5. Formulierung und Beweis des Satzes 2

Satz 2. Sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt und genügt $z = \varphi(x, y)$ in U_1 noch einer weiteren Differentialgleichung

$$(17) \quad G(z, p, q, x, y) = 0,$$

wo G eine in der Umgebung U_2 des Punktes $(z^0, p^0, q^0, x^0, y^0)$ einmal stetig differenzierbare Funktion ihrer fünf Argumente ist, so erfüllt $z = \varphi(x, y)$ im Punkte (x^0, y^0) auch die Involutionsgleichung (16).

Bemerkung. Ist der Satz 2 einmal in der obigen Fassung bewiesen, so kann in der Behauptung dieses Satzes offenbar der Punkt (x^0, y^0) durch jeden Punkt (x, y) aus U_1 ersetzt werden, für den (z, p, q, x, y) in U_2 liegt.

Beweis. Da für die nach Satz 1 in einer Umgebung von $t=0$ existierenden Funktionen (7) die Relationen (3) und (4) erfüllt sind, gilt auch in einer Umgebung von $t=0$ die Relation:

$$(18) \quad G(z(t), p(t), q(t), x(t), y(t)) = 0.$$

Differenzieren wir (18) nach t für $t=0$ und berücksichtigen die Gleichungen (6), so folgt im Punkte (x^0, y^0) :

$$G'_z(pF'_p + qF'_q) - G'_p(F'_x + pF'_z) - G'_q(F'_y + qF'_z) + G'_x F'_p + G'_y F'_q = 0.$$

Dies ist aber genau die behauptete Relation (16).

Sowohl die Sätze 1 und 2 als auch unsere Beweise übertragen sich wörtlich auf den Fall von beliebig vielen unabhängigen Variablen.

Kap. III. Zum Existenzprinzip der Charakteristikentheorie

§ 6. Problemstellung

Die CAUCHYSche Charakteristikentheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1) beruht neben dem Eindeutigkeitsprinzip auf der folgenden Tatsache, die wir als das *Existenzprinzip* der Charakteristikentheorie bezeichnen wollen.

Man setze das System der „Charakteristischen Differentialgleichungen“ an:

$$(19) \quad x' = F'_p, \quad y' = F'_q, \quad z' = pF'_p + qF'_q, \quad -p' = F'_x + pF'_z, \quad -q' = F'_y + qF'_z,$$

wobei als unabhängige Veränderliche t zu benutzen ist. Ein Integral

$$(20) \quad x(t; x^0, y^0, z^0, p^0, q^0), \quad y(t; x^0, \dots, q^0), \dots, \quad q(t; x^0, \dots, q^0)$$

von (19), das zu den Anfangswerten $x^0, \dots, q^0$ für $t=0$ gehört, stellt dann einen charakteristischen Streifen von Flächenelementen dar, der durch das Flächenelement $(x^0, \dots, q^0)$ hindurchgeht. Ist nun ein beliebiger „Integral-Elementen-

Streifen“ gegeben, d.h. eine von einem Parameter τ abhängige Schar von Flächenelementen

$$(21) \quad x(\tau), y(\tau), \dots, q(\tau),$$

wobei die Relation

$$(22) \quad z'(\tau) = p x'(\tau) + q y'(\tau)$$

erfüllt sein muß und

$$(23) \quad F(z(\tau), \dots, y(\tau)) = 0$$

identisch in τ gilt, und legt man durch jedes Flächenelement des Streifens (21) einen charakteristischen Streifen hindurch, so erhält man „im allgemeinen“ eine Integralmannigfaltigkeit von (1)⁸⁾.

Zur scharfen Formulierung des Existenzprinzips sind allerdings Präzisierungen nötig. Setzt man in (20)

$$(24) \quad x^0 = x(\tau), \dots, q^0 = q(\tau),$$

so werden die Funktionen (20) zu

$$(25) \quad X(t, \tau), Y(t, \tau), Z(t, \tau), P(t, \tau), Q(t, \tau)$$

und der springende Punkt der Theorie besteht im Nachweis der Relation

$$(26) \quad dZ(t, \tau) = P(t, \tau) dX(t, \tau) + Q(t, \tau) dY(t, \tau),$$

wobei als unabhängige Variablen t und τ zugrunde zu legen sind⁹⁾.

⁸⁾ Damit man in (25) eine wirklich zweifach unendliche Schar von Flächenelementen erhält, muß vorausgesetzt werden, daß der Streifen (21) nicht selbst ein charakteristischer Streifen ist. Es wäre daher auf jeden Fall zu verlangen, daß in keinem τ -Intervall der Streifen (21) die Differentialgleichungen (19) erfüllt. Doch ist diese Bedingung für unsere weiteren Entwicklungen unwesentlich.

⁹⁾ Ist die Relation (26) einmal bewiesen, so liefert ihre weitere Diskussion unter geeigneten Annahmen verschiedene Präzisierungen des Existenzsatzes. Kann man z.B. als unabhängige Variablen X und Y wählen, so ist

$$Z = \varphi(X, Y), \quad P = \varphi'_x(X, Y), \quad Q = \varphi'_y(X, Y)$$

eine Integralfäche von (1). Um dies aber in einer Umgebung von $t=0$ zu sichern, könnte man etwa voraussetzen, daß dort die Funktionaldeterminante

$$(*) \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(t, \tau)} = \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ X'_\tau & Y'_\tau \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Für $t=0$ bekommt man den Ausdruck $\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ x'(\tau) & y'(\tau) \end{vmatrix}$, und sein Nichtverschwinden bedeutet, daß die Trägerkurve der Schar (21) in keinem Punkte eine charakteristische Kurve, d.h. einen Elementarkegel von (1) berührt.

Verschwindet aber die Determinante (*) identisch, so wäre es immerhin möglich, daß man X und Z oder Y und Z als Parameter zugrunde legen kann. Und man bekommt dann eine Integralfäche, die zur Differentialgleichung (1) gehört, wobei man allerdings diese Differentialgleichung erst auf homogene Richtungskordinaten umschreiben müßte. Hängen aber die drei Funktionen X, Y, Z nur von einem wesentlichen Parameter ab, so hat man es in (25) mit einer zweifach unendlichen Integralmannigfaltigkeit zu tun, deren Trägerort aber nicht eine Fläche, sondern eine Kurve ist.

§ 7. Diskussion der Fragestellung

Damit die Relation (26) überhaupt einen Sinn hat, müssen $X(t, \tau)$, $Y(t, \tau)$ und $Z(t, \tau)$ auch nach τ differenzierbar sein. Damit nun die Integrale der Differentialgleichungen (19) nach dem in die Anfangswerte eingehenden Parameter τ differenzierbar sind, ist es z.B. *hinreichend*¹⁰⁾, daß die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen in bezug auf die Größen x, y, z, p, q stetig differenzierbar sind. Doch ist dies natürlich durchaus nicht etwa auch notwendig. Andererseits ergibt sich aus der Annahme der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seiten von (19) auch noch die Existenz der gemischten Ableitungen $\frac{d^2 x}{dt d\tau}$, $\frac{d^2 y}{dt d\tau}$, die bei der berühmten, von CAUCHY herrührenden Methode des Nachweises der Relation (26) in die Rechnung eingehen¹¹⁾.

Man kann nun, wie wir im folgenden zeigen werden, diesen Nachweis so führen, daß dabei die Benutzung der obigen gemischten Ableitungen vermieden wird. Dies bedeutet: *Werden die Größen*

$$(27) \quad F'_x, F'_p, F'_q, F'_x, F'_y$$

als stetig vorausgesetzt, und sind die aus (19), (20), (24) hervorgehenden Funktionen $X(t, \tau), \dots, Q(t, \tau)$ sowohl nach t als auch nach τ stetig differenzierbar, so gilt die Relation (26).

Man kann hier aber noch einen Schritt weiter gehen: In der Relation (26) kommen ja die Ableitungen von P und Q gar nicht vor. Man wird sich daher fragen, ob nicht die auf P und Q bezügliche Voraussetzung der Differenzierbarkeit fallen gelassen oder abgeschwächt werden kann. In einem gewissen Maße ist dies uns gelungen. Setzt man z.B. über $P(t, \tau)$ und $Q(t, \tau)$ voraus, daß sie in bezug auf τ gleichmäßig in t zur LIPSCHITZ-Klasse¹²⁾ L_α , $\alpha > \frac{1}{2}$, oder zur LIPSCHITZ-Klasse l_α , $\alpha \geq \frac{1}{2}$ gehören, so kann man die Relation (26) immer noch herleiten, wenn man allerdings über F'_p, F'_q voraussetzt, daß sie in bezug auf p, q gleichmäßig in den übrigen Variablen zur LIPSCHITZ-Klasse $l_{\frac{1}{\alpha}-1}$ bzw. $L_{\frac{1}{\alpha}-1}$ gehören.

Wenn also insbesondere die Größen F'_p, F'_q in bezug auf p und q der LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung 1 genügen, bleibt der Existenzsatz richtig, wenn $P(t, \tau)$ und $Q(t, \tau)$ zur LIPSCHITZ-Klasse l_1 in bezug auf τ gleichmäßig in t gehören¹³⁾.

Daß aber auf diese Weise in der Tat die Gültigkeitsgrenzen der Theorie über das Bisherige hinaus erweitert werden, zeigen die in § 13 besprochenen Beispiele.

Wir formulieren allerdings den Satz 3 noch etwas allgemeiner, indem wir von vornherein die zu den LIPSCHITZ-Moduln $\psi(\varrho), \Psi(\varrho)$ des § 2 gehörenden LIPSCHITZ-Klassen einführen.

¹⁰⁾ Vgl. KAMKE, E.: I. c. pp. 164—166.

¹¹⁾ Vgl. KAMKE, E.: I. c. pp. 356—357.

¹²⁾ Vgl. § 2.

¹³⁾ Übrigens ergibt sich (26) unter der Annahme der LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung 1 für die ersten partiellen Ableitungen von F und der LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung 1 für die Funktionen (21) von τ aus dem wichtigen Resultate von T. WAŻEWSKI, Math. Z. 43, 522—532 (1932); vgl. auch HAAR, A.: Comptes Rendus 187, 23—25 (1928).

§ 8. Formulierung des Satzes 3

Zusammengefaßt lautet die zu beweisende Formulierung wie folgt:

Satz 3. Es seien im τ -Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ die fünf Funktionen (21) von τ stetig, $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ seien dort stetig differenzierbar, und es seien die Relationen (22) und (23) erfüllt.

Es seien F und die Größen (27) in einer Umgebung jedes der Wertsysteme (21) vorhanden und stetig.

Von den fünf aus (20) vermöge des Ansatzes (24) hervorgehenden Funktionen (25) seien X , Y und Z in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ stetig differenzierbar.

Durchläuft τ das Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ und t eine geeignete Umgebung des Nullpunktes, so sei der von den fünf Größen (25) durchlaufene Teilbereich des fünf-dimensionalen Raumes mit U bezeichnet. Es sei dann $\psi(\varrho)$ ein der Bedingung (d) von § 2 genügender LIPSCHITZ-Modul, der einen komplementären LIPSCHITZ-Modul $\Psi(\varrho)$ besitzt, und es möge eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:

A. $P(t, \tau)$, $Q(t, \tau)$ gehören in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ gleichmäßig in t in einer Umgebung von $t=0$ zur Klasse l_ψ und F'_p, F'_q zur Klasse L_Ψ in bezug auf p und q aus U gleichmäßig in z, x, y aus U .

B. $P(t, \tau)$, $Q(t, \tau)$ gehören in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ gleichmäßig in t in einer Umgebung von $t=0$ zur Klasse L_ψ und F'_p, F'_q zur Klasse l_Ψ in bezug auf p und q aus U gleichmäßig in z, x, y aus U .

Dann gilt für alle τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ und für alle t in einer Umgebung von $t=0$ die Relation (26).

Dem Beweise schicken wir einige Lemmata voraus.

§ 9. Ein Lemma über die GREENSche Umformung

Lemma 1. Sei R ein abgeschlossenes Rechteck in der t, τ -Ebene¹⁴⁾, und U, V seien zwei mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung auf R stetige Funktionen. Dann gilt

$$(28) \quad \oint_R U dV = \iint_R (U'_t V'_\tau - U'_\tau V'_t) dt d\tau.$$

Beweis¹⁵⁾. Wir setzen zunächst voraus, daß U, V und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auch noch außerhalb von R in einer gewissen Umgebung des Randes existieren und stetig sind.

Bekanntlich¹⁶⁾ lassen sich dann zwei Polynomfolgen $P_\nu(t, \tau)$ und $Q_\nu(t, \tau)$ finden, derart, daß mit $\nu \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Rechteck R

$$(29) \quad \begin{cases} P_\nu \Rightarrow U, & P'_{\nu t} \Rightarrow U'_t, & P'_{\nu \tau} \Rightarrow U'_\tau, \\ Q_\nu \Rightarrow V, & Q'_{\nu t} \Rightarrow V'_t, & Q'_{\nu \tau} \Rightarrow V'_\tau \end{cases}$$

¹⁴⁾ Dabei sollen hier und im folgenden die t - und τ -Achsen so orientiert werden, daß die t -Achse der x -Achse und die τ -Achse der y -Achse entspricht.

¹⁵⁾ Vgl. SCHMIDT, E.: Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wien. Mh. Math. Phys. **48**, 426—432 (1940), wo man einen anderen Beweis des obigen Lemmas findet.

¹⁶⁾ Siehe z.B. DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'Analyse Infinitésimale, 2. Aufl., tome II, pp. 133—135, 1912.

gilt. Die CLAIRAUTSche Umformung des Linienintegrals liefert dann

$$\oint_R P_v(Q'_{vt}) dt + Q'_{v\tau} d\tau = \iint_R \left(\frac{\partial(P_v Q'_{v\tau})}{\partial t} - \frac{\partial(P_v Q'_{vt})}{\partial \tau} \right) dt d\tau \\ = \iint_R (P'_{vt} Q'_{v\tau} - P'_{v\tau} Q'_{vt}) dt d\tau,$$

d.h. (28) für P_v, Q_v . Für $v \rightarrow \infty$ folgt daraus wegen (29) die Behauptung des Lemmas.

Wir lassen nun die Annahme fallen, daß die Stetigkeitsvoraussetzungen über U, V und ihre ersten Ableitungen noch außerhalb von R in einer Umgebung des Randes gelten. Es sei dann R_v eine Folge von ineinander geschachtelten Rechtecken in R , die für $v \rightarrow \infty$ gegen R konvergieren und aus R durch Ähnlichkeitstransformationen in bezug auf den Mittelpunkt von R hervorgehen. Nach dem bewiesenen Fall des Satzes gilt (28) für jedes Rechteck R_v . Für $v \rightarrow \infty$ strebt das über R_v erstreckte Doppelintegral in (28) gegen das über R erstreckte Doppelintegral. Um dasselbe für die Linienintegrale in (28) zu beweisen, sei s eine Seite von R und s_v die entsprechende Seite von R_v .

Dann ist, wenn die einander entsprechenden Endpunkte von s, s_v in geeigneter Reihenfolge mit $P, p_v; Q, q_v$ bezeichnet werden, die Relation zu beweisen:

$$(30) \quad \int_{p_v}^{q_v} U dV \rightarrow \int_P^Q U dV.$$

Ist π der allgemeine Punkt der Strecke s , so sei der ihm bei der Ähnlichkeitstransformation in bezug auf den Mittelpunkt von R entsprechende Punkt auf s_v mit π_v bezeichnet. Wir setzen dann

$$U(\pi_v) = U_v(\pi), \quad V(\pi_v) = V_v(\pi).$$

Dann geht (30) über in

$$\int_P^Q U_v dV_v \rightarrow \int_P^Q U dV$$

oder

$$\int_P^Q U_v (V'_{vt} dt + V'_{v\tau} d\tau) \rightarrow \int_P^Q U (V'_t dt + V'_\tau d\tau),$$

und dies folgt unmittelbar daraus, daß, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von U, V und ihrer ersten Ableitungen auf R , die $U_v, V_v, V'_{vt}, V'_{v\tau}$ gleichmäßig auf s mit $v \rightarrow \infty$ bzw. gegen U, V, V'_t, V'_τ konvergieren.

Das Lemma 1 wird im folgenden nur zum Beweis des Lemmas 2 gebraucht.

§ 10. Zwei Lemmata über Integralapproximationen

Lemma 2. Sei T das Rechteck: $t_0 \leq t \leq t_1, \tau' \leq \tau \leq \tau''$ in der t, τ -Ebene. Das Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ sei in n Teilintervalle zerlegt durch die Teilpunkte $\tau' = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau''$ und damit das Rechteck T in n Rechtecke T_v , wobei τ in T_v zwischen τ_{v-1} und τ_v verläuft, $v = 1, \dots, n$.

Es seien ferner $n+1$ in $\langle t_0, t_1 \rangle$ stetig differenzierbare Funktionen von t gegeben:

$$U_\nu(t) \quad (\nu = 0, \dots, n).$$

Wir setzen dann $U^*(t, \tau) = U_\nu(t)$ für $\tau_{\nu-1} < \tau \leq \tau_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$ und $U^*(t, \tau_0) = U_0(t)$.

$V(t, \tau)$ sei einmal stetig differenzierbar nach t und τ auf T . Dann gilt

$$(31) \quad \oint_T U^* dV - \iint_T U_i^* V'_\tau dt d\tau = - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\nu=1}^n V'_i(t, \tau_{\nu-1}) (U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t)).$$

Beweis. Die linke Seite von (31) ist gleich

$$(32) \quad \sum_{\nu=1}^n \left[\oint_{T_\nu} U^* dV - \iint_{T_\nu} U_i^{*'} V'_\tau dt d\tau \right].$$

Im zweiten Integral innerhalb der Klammer ist $U_i^{*'}$ beschränkt und innerhalb des Rechtecks T_ν gleich $U'_\nu(t)$. Daher ist dieses Flächenintegral gleich

$$\iint_{T_\nu} U'_\nu(t) V'_\tau dt d\tau.$$

Im ersten Integral innerhalb der Klammer in (32) ist U^* auf drei Seiten des Rechtecks T_ν gleich $U_\nu(t)$ und nur auf der vierten Seite, $\tau = \tau_{\nu-1}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, die von t_0 nach t_1 durchlaufen wird [vgl. ¹⁴], ist $U^* = U_{\nu-1}(t)$. Daher gilt

$$\oint_{T_\nu} U^* dV = \oint_{T_\nu} U_\nu dV - \int_{t_0}^{t_1} V'_i(t, \tau_{\nu-1}) (U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t)) dt.$$

Damit wird der Ausdruck in der Klammer in (32) zu

$$\left[\oint_{T_\nu} U_\nu dV - \iint_{T_\nu} U'_\nu(t) V'_\tau dt d\tau \right] - \int_{t_0}^{t_1} V'_i(t, \tau_{\nu-1}) (U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t)) dt.$$

Hier ist aber die erste Differenz nach dem Lemma 1 gleich

$$- \iint_{T_\nu} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} U_\nu \right) V'_i dt d\tau = 0,$$

da U_ν von τ unabhängig ist. Daher reduziert sich die Summe (32) auf die rechte Seite von (31), womit das Lemma 2 bewiesen ist.

Dieses Lemma wird im folgenden nur zum Beweis des Lemmas 3 benutzt.

Lemma 3. Es sei $U(t, \tau)$ eine auf dem Rechteck T des Lemmas 2 stetige und einmal stetig nach t differenzierbare Funktion, ferner $V(t, \tau)$ eine auf T stetige und einmal stetig nach t, τ differenzierbare Funktion. Wird das Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ in n Teilintervalle zerlegt durch die Teilpunkte τ_ν mit $\tau' = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \tau$, so bezeichnen wir diese Zerlegung mit λ und setzen $l_\lambda = \max_\nu (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})$, so daß l_λ das Maß für die Feinheit der Intervalleinteilung ist. Dann gilt für $l_\lambda \rightarrow 0$

$$(33) \quad \lim_{l_\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^n V'_i(t, \tau_{\nu-1}) (U(t, \tau_\nu) - U(t, \tau_{\nu-1})) dt = \iint_T U'_i V'_\tau dt d\tau - \oint_T U dV.$$

Beweis. Wir setzen

$$U_\nu(t) = U(t, \tau_\nu)$$

und bilden mit diesen Funktionen $U_\nu(t)$ nach der Vorschrift des Lemmas 2 die Funktionen $U^*(t, \tau)$. Dann konvergieren für $l_\lambda \rightarrow 0$, auf T gleichmäßig, $U^*(t, \tau)$ und $U_t^{*'}(t, \tau)$ bzw. gegen $U(t, \tau)$ und $U_t'(t, \tau)$. Andererseits gilt nach Lemma 2

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^n V_t'(t, \tau_{\nu-1}) [U(t, \tau_\nu) - U(t, \tau_{\nu-1})] dt = \iint_T U_t^{*'} V_\tau' dt d\tau - \oint U^* dV.$$

Für $l_\lambda \rightarrow 0$ strebt aber dies gegen die rechte Seite von (33), womit (33) bewiesen ist.

§ 11. Beginn des Beweises von Satz 3

Wir gehen nun zum Beweise des Satzes 3 über.

Sei $h > 0$ so beschaffen, daß im t -Intervall

$$(34) \quad -h \leq t \leq h$$

die Voraussetzungen des Satzes zutreffen. Wir setzen für ein ganzes $n > 1$:

$$\Delta = \frac{\tau' - \tau'}{n}, \quad \tau_\nu = \tau' + \nu \Delta, \quad \nu = 0, \dots, n$$

und für $0 \leq \nu \leq n$:

$$Z(t, \tau_\nu) = z_\nu, \quad P(t, \tau_\nu) = p_\nu, \quad Q(t, \tau_\nu) = q_\nu, \quad X(t, \tau_\nu) = x_\nu, \quad Y(t, \tau_\nu) = y_\nu,$$

sowie für $1 \leq \nu \leq n$:

$$z_\nu - z_{\nu-1} = \xi_\nu, \quad p_\nu - p_{\nu-1} = \pi_\nu, \quad q_\nu - q_{\nu-1} = \kappa_\nu, \quad x_\nu - x_{\nu-1} = \xi_\nu, \quad y_\nu - y_{\nu-1} = \eta_\nu.$$

Da F sowohl für z, p, q, x, y als auch für $z_{\nu-1}, p_{\nu-1}, \dots, y_{\nu-1}$ verschwindet, gilt identisch, wenn wir für den Augenblick den Index $\nu-1$ weglassen, also unter $z, p, \dots, y$ die Größen $z_{\nu-1}, p_{\nu-1}, \dots, y_{\nu-1}$ verstehen,

$$(35) \quad \begin{cases} F(z, p + \pi_\nu, q + \kappa_\nu, x, y) - F(z, p, q, x, y) \\ = -[F(z + \xi_\nu, p + \pi_\nu, q + \kappa_\nu, x + \xi_\nu, y + \eta_\nu) - F(z, p + \pi_\nu, q + \kappa_\nu, x, y)]. \end{cases}$$

Die linke Seite von (35) ist nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Variablen p, q , für ein ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq 1$, gleich

$$(\pi_\nu F_p' + \kappa_\nu F_q') (z, p + \vartheta \pi_\nu, q + \vartheta \kappa_\nu, x, y),$$

und dies unterscheidet sich für $\Delta \rightarrow 0$, nach Voraussetzung des Satzes, von $(\pi_\nu F_p' + \kappa_\nu F_q') (z, p, q, x, y)$ um

$$(36) \quad O[(|\pi_\nu| + |\kappa_\nu|) \Psi(|\pi_\nu| + |\kappa_\nu|)] \quad \text{oder} \quad o[(|\pi_\nu| + |\kappa_\nu|) \Psi(|\pi_\nu| + |\kappa_\nu|)]$$

je nachdem, welche der Bedingungen A, B gilt. In beiden Fällen ist aber der entsprechende Ausdruck (36), wegen der Relation (c) in § 2, gleich $o(\Delta)$, so daß die linke Seite von (35) gleichmäßig in (34) gleich

$$(\pi_\nu F_p' + \kappa_\nu F_q') (z, p, q, x, y) + o(\Delta)$$

oder, wegen der beiden ersten Gleichungen (19),

$$(37) \quad \pi_v X'_t(t, \tau_{v-1}) + \kappa_v Y'_t(t, \tau_{v-1}) + o(\Delta)$$

wird.

Um die rechte Seite von (35) geeignet darzustellen, wenden wir auf F als Funktion von z, x, y den Mittelwertsatz an und erhalten für ein ϑ_1 mit $0 \leq \vartheta_1 \leq 1$ den Ausdruck

$$-(\zeta_v F'_z + \xi_v F'_x + \eta_v F'_y)(z + \vartheta_1 \kappa_v, p + \pi_v, q + \kappa_v, x + \vartheta_1 \xi_v, y + \vartheta_1 \eta_v),$$

oder, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von F'_z, F'_x, F'_y ,

$$-[(\zeta_v F'_z + \xi_v F'_x + \eta_v F'_y)(z, p, q, x, y) + o(|\zeta_v| + |\xi_v| + |\eta_v|)].$$

Hier ist aber das o -Glieder zugleich $o(\Delta)$, da die Ableitungen von Z, X, Y in bezug auf τ gleichmäßig beschränkt sind.

Andererseits gilt, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $Z'_\tau, X'_\tau, Y'_\tau$, $\zeta_v = \Delta Z'_\tau(t, \tau_{v-1}) + o(\Delta)$, $\xi_v = \Delta X'_\tau(t, \tau_{v-1}) + o(\Delta)$, $\eta_v = \Delta Y'_\tau(t, \tau_{v-1}) + o(\Delta)$, so daß wir für die rechte Seite von (35) schließlich erhalten

$$-\Delta(Z'_\tau F'_z + X'_\tau F'_x + Y'_\tau F'_y) + o(\Delta),$$

wo $Z'_\tau, X'_\tau, Y'_\tau$ im Punkte (t, τ_{v-1}) und F'_z, F'_x, F'_y entsprechend im Punkte (z, p, q, x, y) zu nehmen sind. So ergibt sich schließlich aus (35) für $\Delta \rightarrow 0$

$$(38) \quad X'_t(t, \tau_{v-1}) \pi_v + Y'_t(t, \tau_{v-1}) \kappa_v = -(Z'_\tau F'_z + X'_\tau F'_x + Y'_\tau F'_y) \Delta + o(\Delta)$$

gleichmäßig in (34), wo rechts alle Argumente im Punkte (t, τ_{v-1}) zu nehmen sind.

§ 12. Zuendeführung des Beweises von Satz 3

Summieren wir (38) über v von 1 bis n und integrieren sodann über t von t_0 bis t_1 , wo t_0 und t_1 im Intervall (34) liegen, so folgt

$$(39) \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n (X'_t(t, \tau_{v-1}) \pi_v + Y'_t(t, \tau_{v-1}) \kappa_v) dt \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta \sum_{v=1}^n (Z'_\tau F'_z + X'_\tau F'_x + Y'_\tau F'_y) dt + o(1). \end{cases}$$

Hier lassen wir nun n ins Unendliche gehen und bestimmen die Grenzwerte der beiden Seiten. Rechts konvergiert der *Integrand* mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in bezug auf t in (34) gegen das Integral¹⁷⁾

$$\int_{\tau'}^{\tau''} (F'_z Z'_\tau + F'_x X'_\tau + F'_y Y'_\tau) d\tau,$$

¹⁷⁾ Man beachte, daß $Z'_\tau, X'_\tau, Y'_\tau$ stetig in den beiden Variablen t, τ sind.

so daß die ganze rechte Seite von (39) zum Grenzwert das Doppelintegral über das Rechteck $T(t_0 \leq t \leq t_1, \tau' \leq \tau \leq \tau'')$,

$$(40) \quad - \iint_T (F_z' Z_\tau' + F_x' X_\tau' + F_y' Y_\tau') d\tau dt$$

hat. Um den Grenzwert der linken Seite von (39) zu ermitteln, zerlegen wir sie in die beiden Summanden

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n X_t'(t, \tau_{v-1}) \pi_v dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n Y_t'(t, \tau_{v-1}) \kappa_v dt$$

und wenden auf die beiden Integrale die Formel (33) des Lemmas 3 an, wobei für V und U einmal X und P , das andere Mal Y und Q einzusetzen sind. Dann ergibt sich als Grenzwert der linken Seite von (39)

$$\iint_T (X_\tau' P_t' + Y_\tau' Q_t') d\tau dt - \oint_T (P dX + Q dY),$$

oder, wenn wir für P_t' und Q_t' ihre Werte aus den Differentialgleichungen (19) einsetzen,

$$(41) \quad - \iint_T (F_x' X_\tau' + F_y' Y_\tau' + F_z' (P X_\tau' + Q Y_\tau')) d\tau dt - \oint_T (P dX + Q dY).$$

Daher ergibt sich schließlich aus (39)

$$\oint_T (P dX + Q dY) = \iint_T F_z' (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau') d\tau dt.$$

Beachten wir andererseits, daß $\oint_T dZ$ verschwindet, so folgt hieraus ferner

$$(42) \quad \oint_T (dZ - P dX - Q dY) = - \iint_T F_z' (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau') d\tau dt.$$

Das Linienintegral links ist hier gleich

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [(Z_t' - P X_t' - Q Y_t')_{\tau=\tau'} - (Z_t' - P X_t' - Q Y_t')_{\tau=\tau''}] d\tau - \\ & - \int_{\tau'}^{\tau''} [(Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_0} - (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_1}] d\tau, \end{aligned}$$

und hier verschwindet wegen der ersten drei Differentialgleichungen (19) das erste Integral. Setzen wir ferner $t_0=0$ und bedenken, daß für $t=0$ nach (22) $Z_\tau' = P X_\tau' + Q Y_\tau'$ ist, so ergibt sich schließlich

$$(43) \quad \int_{\tau'}^{\tau''} (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_1} d\tau = - \int_{\tau'=0}^{\tau''} \int_{t=0}^{t_1} F_z' (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau') d\tau dt.$$

Ersetzen wir hier, was offenbar erlaubt ist, τ'' durch einen beliebigen Wert τ zwischen τ' und τ'' und differenzieren auf beiden Seiten nach τ , so

ergibt sich

$$(Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau)_{t=t_1} = - \int_0^{t_1} F'_z(Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau) dt.$$

Hier darf man offenbar für t_1 jeden Wert t aus dem Intervall (34) einsetzen. Dann folgt aus dieser Gleichung, daß ihre rechte Seite in (34) nach t differenzierbar ist, so daß, wenn

$$U(t, \tau) = Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau$$

gesetzt wird, U die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -F'_z U.$$

Und hieraus folgt endlich durch klassische Schlüsse, da U für $t=0$ verschwindet, daß U für alle t aus (34) und alle τ im Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ verschwindet, woraus (26) unmittelbar folgt. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 13. Schlußbemerkungen und Beispiele

Es sei noch hervorgehoben, daß die Überlegungen der §§ 10 und 11 nur dann nötig sind, wenn man die Bedingungen A und B unseres Satzes benutzt. Wird dagegen die stetige Differenzierbarkeit von P und Q nach τ vorausgesetzt, so sind diese Betrachtungen unnötig und unser Beweis vereinfacht sich ganz wesentlich.

Endlich ist noch zu bemerken, daß der Satz 3 sich unmittelbar auf den Fall verallgemeinern läßt, in dem $n \geq 2$ unabhängige Variablen vorausgesetzt werden. Man kann dann insbesondere mit den drei obigen Lemmata auskommen und nur in den §§ 11 und 12 sind einige sofort ersichtliche Änderungen anzubringen.

Ein *erstes Beispiel* für die Anwendung des Satzes wird geliefert durch die partielle Differentialgleichung

$$(44) \quad p - q^3 = 0,$$

wobei als Anfangselementenstreifen

$$x = 0, \quad y = \tau, \quad z = \tau^{\frac{2}{3}}, \quad p = \frac{125}{27} \tau^2, \quad q = \frac{5}{3} \tau^{\frac{2}{3}}$$

angenommen wird. Dafür sind (44) und (22) sofort zu verifizieren. Die Differentialgleichungen des charakteristischen Streifens sind hier

$$x' = 1, \quad y' = -3q^2, \quad z' = -2q^3, \quad p' = 0, \quad q' = 0,$$

und daraus folgt sofort durch Integration

$$X(t, \tau) = t, \quad Y(t, \tau) = -\frac{25}{3} \tau^{\frac{2}{3}} t + \tau, \quad Z(t, \tau) = -\frac{250}{27} \tau^2 t + \tau^{\frac{5}{3}},$$

$$P(t, \tau) = \frac{125}{27} \tau^2, \quad Q(t, \tau) = \frac{5}{3} \tau^{\frac{2}{3}}.$$

Hier ist F analytisch. X, Y, Z, P sind überall nach τ differenzierbar, während Q in bezug auf τ zur LIPSCHITZ-Klasse $L_{\frac{1}{3}}$ gehört. Daher ist unser Satz anwendbar, und in der Tat sieht man sofort, daß die Relation (26) erfüllt ist, denn es gilt

$$-\frac{500}{27}\tau t + \frac{5}{3}\tau^{\frac{2}{3}} = Z'_{\tau} = P X'_{\tau} + Q Y'_{\tau} = \frac{5}{3}\tau^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{100}{9}\tau^{\frac{1}{3}}t + 1\right).$$

Um in diesem Falle die Darstellbarkeit von z durch x und y für kleine x und y diskutieren zu können, setze man $\tau = u^3$. Dann ergibt sich zwischen x, y, u die Gleichung 4. Grades

$$(45) \quad u^3 - \frac{25}{3}xu^4 - y = 0.$$

Für kleine x und y ist nun eine Wurzel von (45) in bezug auf u sehr groß. Mit $x \rightarrow 0$ ist diese Wurzel $\sim \frac{3}{25x}$.

Da andererseits die Ableitung der linken Seite von (45) nach u neben der für kleine x sehr großen Wurzel $\sim \frac{9}{100x}$ nur eine Doppelwurzel im Nullpunkt besitzt, hat (45) für kleine $y \neq 0$ genau eine weitere reelle Wurzel, der entsprechend u durch (45) als eine für kleine x und y eindeutige mit $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ gegen 0 konvergierende Funktion definiert ist. Daher läßt sich auch z für kleine x und y als eine eindeutige Funktion von x, y darstellen.

Für die partiellen Ableitungen von u nach x, y erhält man aus (45)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{25u^2}{9 - 100xu}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u^2} \frac{3}{9 - 100xu},$$

so daß die ersten partiellen Ableitungen von

$$z = -\frac{250}{27}xu^6 + u^5$$

nach x und y bis in den Nullpunkt hinein stetig bleiben.

In diesem Beispiel gestattet der Existenzsatz von WAŻEWSKI [l. c. ¹³] keinen Nachweis der Lösbarkeit des CAUCHYSchen Problems. — Allerdings läßt sich dieses Beispiel mit Hilfe des Existenzsatzes von WAŻEWSKI behandeln, wenn man von vornherein statt τ einen neuen Parameter u durch $\tau = u^3$ einführt.

Ein zweites Beispiel liefert die Differentialgleichung

$$(46) \quad p - 5q^{\frac{5}{3}} = 0$$

mit dem Anfangselementenstreifen

$$x(\tau) = 0, \quad y(\tau) = \tau, \quad z(\tau) = \frac{1}{3}\tau^3, \quad p(\tau) = 5\tau^{\frac{10}{3}}, \quad q(\tau) = \tau^2.$$

Hier lauten die Differentialgleichungen des charakteristischen Streifens

$$x' = 1, \quad y' = -\frac{25}{3}q^{\frac{2}{3}}, \quad z' = -\frac{10}{3}q^{\frac{2}{3}}, \quad p' = 0, \quad q' = 0,$$

und ihre Integration liefert

$$X = t, \quad Y = -\frac{25}{3}\tau^{\frac{4}{3}}X + \tau, \quad Z = -\frac{10}{3}\tau^{\frac{10}{3}}X + \frac{1}{3}\tau^3, \quad P = 5\tau^{\frac{10}{3}}, \quad Q = \tau^2.$$

Hier sind X, Y, Z stetig differenzierbar nach τ , übrigens auch P und Q , während F'_q zur LIPSCHITZ-Klasse $L_{\frac{2}{3}}$ gehört. Daher muß nach unserem Satz die Relation (26) erfüllt sein, wie man auch durch direkte Rechnung sofort verifiziert.

Andererseits läßt sich auch hier z in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig durch x und y darstellen, da für $\tau = u^3$ zwischen u, x, y sich wiederum die Relation (45) ergibt und z im Nullpunkt in hinreichend hoher Ordnung verschwindet. Auch in diesem Fall ist der allgemeine Existenzsatz von WAŻEWSKI [l. c.¹³] nicht anwendbar.

Es sei endlich noch bemerkt, daß die Resultate dieser Abhandlung 1948 in einem Vortrag anläßlich der Tagung der Italienischen Mathematischen Gesellschaft in Pisa mitgeteilt wurden.

Basel, Mathematische Anstalt der Universität

(Eingegangen am 2. März 1956)

Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen

Von

MARTIN KNESER

§ 1. Fragestellung und Ergebnisse

G sei eine lokalkompakte abelsche Gruppe, μ das HAARSche Maß auf G , μ_* das zugehörige innere Maß, A und B nichtleere integrierbare Teilmengen von G , d.h. meßbare Teilmengen mit endlichem Maß¹⁾. Die Frage, was man über das Maß der Summe $A+B$ sagen kann, wenn man $\mu(A)$ und $\mu(B)$ kennt, ist für verschiedene spezielle Gruppen behandelt worden. Am bekanntesten ist die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung (s. z.B. [2] und die dort zitierte Literatur). Weitere Beispiele: In der Arbeit [10] wird die eindimensionale, in [3] und [6] die n -dimensionale Torusgruppe behandelt. Diese Ergebnisse sind in einem allgemeinen Satz der kürzlich erschienenen Arbeit [11] enthalten, der im wesentlichen mit dem untenstehenden Satz 1a übereinstimmt und kompakte zusammenhängende Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom betrifft. Schließlich gehören noch die Resultate aus [6] und einigen dort zitierten Arbeiten über endliche Gruppen sowie unveröffentlichte Ergebnisse von G. VOSPER über die additive Gruppe der p -adischen Zahlen hierher. Im folgenden wird diese Frage für beliebige lokalkompakte abelsche Gruppen behandelt und durch zwei Sätze (Satz 1 und Satz 4) beantwortet, die alle genannten Ergebnisse als Spezialfälle enthalten. Außerdem werden für eine große Klasse von Gruppen (z.B. alle zusammenhängenden Gruppen) die Grenzfälle bestimmt, für die in den Ungleichungen der Sätze 1 und 4 das Gleichheitszeichen steht (Sätze 2, 3 und 5); auch diese Sätze enthalten die entsprechenden Ergebnisse bzw. Vermutungen bei speziellen Gruppen (s. [2] und [3]). Schließlich wird untersucht, inwieweit ein Zusammenhang mit den Dichtesätzen der additiven Zahlentheorie (vgl. [5], [7] und [8]) besteht.

Der erste Satz, dessen Beweis sich nach einigen in § 2 durchgeführten Hilfsbetrachtungen in § 3 findet, gilt für integrierbare Teilmengen A und B einer beliebigen lokalkompakten abelschen Gruppe G und lautet

Satz 1. *Im allgemeinen ist*

$$(1) \quad \mu_*(A+B) \geq \mu(A) + \mu(B)^2).$$

¹⁾ Über die Grundbegriffe der Maßtheorie, insbesondere das HAARSche Maß, vergleiche man die Werke [1] und [13] des Literaturverzeichnisses am Schluß der Arbeit.

²⁾ $A+B$ braucht nicht meßbar zu sein, wenn A und B es sind; daher darf man in der Formel (1) linker Hand μ_* nicht durch μ ersetzen. Ist z.B. G ein zweidimensionaler reeller Vektorraum, A eine Strecke und B eine linear nicht meßbare Menge auf einer zu A nicht parallelen Geraden, so sind A und B Nullmengen, $A+B$ ist aber nicht meßbar. Sind dagegen A und B Vereinigungen von je abzählbar vielen kompakten Mengen, so ist auch $A+B$ von dieser Art und daher meßbar. Da jede integrierbare Menge eine

Ausnahmen sind nur möglich, wenn es eine offene kompakte Untergruppe H von G gibt mit den Eigenschaften

$$(2) \quad A + B + H = A + B,$$

$$(3) \quad \mu(A + B + H) = \mu(A + H) + \mu(B + H) - \mu(H).$$

In diesem Fall gilt also an Stelle von (1) die Ungleichung

$$(4) \quad \mu(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H).$$

Bei der Diskussion der Grenzfälle hat man zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Erstens die, daß der Ausnahmefall (2), (3) vorliegt, und zweitens die, daß in (1) das Gleichheitszeichen steht. Die erste Möglichkeit wollen wir hier nur kurz streifen. Ist H eine offene kompakte Untergruppe von G , so gibt es dazu stets Mengen A und B , die den Bedingungen (2) und (3) genügen, z.B. $A = B = H$. Die Frage nach allen solchen Mengen kann man durch Restklassenbildung modulo H auf die entsprechende Frage in diskreten Gruppen zurückführen. Für endliche Gruppen von Primzahlordnung hat G. VOSPER [12] diese Frage beantwortet. Bei allgemeineren Gruppen scheint die Lage aber komplizierter zu sein. Auch die Diskussion des zweiten Falles wird durch die Existenz von Ausnahmepaaren mit den Eigenschaften (2) und (3) erschwert. Wir beschränken uns daher auf den Fall, in dem die Ausnahmepaare nur eine untergeordnete Rolle spielen, den Fall der zusammenhängenden Gruppen. Da wir außerdem für nicht kompakte, zusammenhängende Gruppen in Satz 4 eine schärfere Ungleichung erhalten und auch für diese das Eintreten des Gleichheitszeichens diskutieren werden, setzen wir zusätzlich G als kompakt voraus. Dann kann im Fall (2) nur $H = G$ sein, da es keine andere offene Untergruppe gibt, und es folgt $A + B = G$. Der Satz 1 geht also in diesem Fall über in den

Satz 1a. Ist G kompakt und zusammenhängend, so gilt

$$(5) \quad \mu_*(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B) \quad \text{falls} \quad \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(G),$$

$$(6) \quad A + B = G \quad \text{falls} \quad \mu(A) + \mu(B) > \mu(G)^3).$$

Hier lassen sich im wesentlichen alle Paare A, B angeben, für die in (5) das Gleichheitszeichen steht. Zunächst ist dies sicher der Fall, wenn $\mu(A) + \mu(B) = \mu(G)$ ist, denn $\mu_*(A + B)$ kann ja nicht größer als $\mu(G) = \mu(A) + \mu(B)$ sein. Daher setzen wir jetzt $\mu(A) + \mu(B) < \mu(G)$ voraus und unterscheiden wieder zwei Fälle, je nachdem ob unter den Mengen A und B eine Nullmenge ist oder nicht. Mengen A und B mit positivem Maß, für die in (5) das Gleichheitszeichen steht, kann man auf folgende Weise erhalten. Es sei χ ein echter additiver Charakter von G , d.h. ein Homomorphismus von G auf die additive Gruppe T der reellen Zahlen modulo eins, die eindimensionale Torusgruppe;

solche Menge von gleichem Maß enthält, würde es genügen, den Satz 1 für diese Mengen zu beweisen; dies bringt hier aber keine Vereinfachung mit sich; dagegen werden wir später beim Beweis der Sätze 2, 4 und 5 von dieser Bemerkung Gebrauch machen.

³⁾ Vgl. [11].

weiter seien K und L zwei Intervalle in T , d.h. homomorphe Bilder von Intervallen der reellen Zahlengeraden, deren Längensumme kleiner als eins ist. Setzt man nun $A = \chi^{-1}(K)$, $B = \chi^{-1}(L)$, so ist $A + B = \chi^{-1}(K + L)$; also stimmen bei geeigneter Normierung des HAARSchen Maßes die Maße von $A, B, A + B$ mit denen von $K, L, K + L$ überein ([13], § 9), und daher gilt in (5) das Gleichheitszeichen. Weitere Beispiele erhält man, wenn man aus $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ Nullmengen wegläßt, da sich dadurch das Maß der Summe sicher nicht vergrößern, nach (5) aber auch nicht verkleinern kann. Daß man auf diese Weise alle kritischen Paare erhält, besagt der

Satz 2. *Es sei G kompakt und zusammenhängend, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ und $\mu(A) + \mu(B) < \mu(G)$. Dann und nur dann gilt in (5) das Gleichheitszeichen, wenn es einen Homomorphismus χ von G in die eindimensionale Torusgruppe T und zwei Intervalle K und L in T gibt derart, daß $A \subseteq \chi^{-1}(K)$, $B \subseteq \chi^{-1}(L)$ und $\mu(A) = \mu(\chi^{-1}(K))$, $\mu(B) = \mu(\chi^{-1}(L))$ ist, wenn also A und B aus $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ durch Weglassen von Nullmengen entstehen.*

Für die n -dimensionale Torusgruppe bestätigt dieser Satz teilweise eine Vermutung von A. M. MACBEATH⁴⁾; sein Beweis wird in § 4 erbracht, ebenso der des nächsten Satzes, der sich mit dem noch übriggebliebenen Fall beschäftigt, daß eine der Mengen, etwa B , eine Nullmenge ist. Hier können wir für G wieder eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe zulassen. Allerdings ist die Antwort auch für zusammenhängende Gruppen nicht ganz so erschöpfend wie die in Satz 3 gegebene. Das kommt daher, daß — wie im Falle eines reellen Vektorraumes [2] — nicht genau bekannt ist, wann die Summe zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Ein typisches Beispiel für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5) mit $\mu(B) = 0$ ist das folgende. G' sei eine kompakte Untergruppe von G , A bestehe aus vollen Restklassen modulo G' , d.h. es gelte $A + G' = A$, und B sei eine in G' enthaltene Nullmenge. Dieses Beispiel kann man noch dadurch abändern, daß man aus A eine Nullmenge wegläßt und eine solche Nullmenge C hinzufügt, für die $\mu_*(C + B) = 0$ ist. Setzt man voraus, was nötigenfalls durch eine Translation erreicht werden kann, daß B die Null enthält, so sind dies die einzigen Beispiele für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5) mit $\mu(B) = 0$. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes, der den Satz 3 aus [2] als Spezialfall enthält.

Satz 3. *Es sei $\mu(A) > \mu(B) = 0$, $0 \in B$ und G' die kleinste B umfassende abgeschlossene Untergruppe von G . Dann und nur dann gilt in (5) das Gleichheitszeichen, wenn G' kompakt ist und es eine Zerlegung $A = C \cup D$ von A in eine Nullmenge C und einen Rest D gibt, derart, daß $\mu_*(C + B) = 0$ und $\mu(D + G') = \mu(D)$ ist.*

Die bisherigen Ergebnisse schließen sich alle an den Satz 1 an. Dieser gilt zwar für beliebige lokalkompakte abelsche Gruppen; er ist aber insofern unbefriedigend, als schon für reelle Vektorräume der Dimension $n \geq 2$ die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung eine wesentlich schärfere Aussage liefert. Nun läßt sich bekanntlich ([13], § 29) jede lokalkompakte abelsche Gruppe G als

⁴⁾ [3] S. 41 oben; dort sind allerdings nicht alle Charaktere berücksichtigt.

direkte Summe $F + R^n$ eines reellen n -dimensionalen Vektorraumes und einer Gruppe F , die eine offene kompakte Untergruppe enthält, schreiben. Ist hier $n=0$, so zeigen die obenstehenden Beispiele, daß der Satz 1 ziemlich scharf ist. Im Falle $n \geq 1$ leiten wir dagegen in § 5 aus der BRUNN-MINKOWSKI-schen Ungleichung die folgende schärfere Aussage ab.

Satz 4. ^{4a)} Ist $G = F + R^n$ die direkte Summe einer Gruppe F und eines reellen Vektorraumes der Dimension $n \geq 1$, so gilt die Ungleichung

$$(7) \quad \mu_*(A + B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}.$$

Auch die Frage nach dem Eintreten des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (7) läßt sich beantworten. Ist eine der Mengen eine Nullmenge, so liefert der Satz 3 die Antwort. Im anderen Falle erhalten wir aus der entsprechenden Aussage der BRUNN-MINKOWSKI-schen Theorie den

Satz 5. Ist $\mu(A) > 0$ und $\mu(B) > 0$, so steht in (7) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn es in F zwei Restklassen H und I einer offenen kompakten Untergruppe und in R^n zwei ähnliche und ähnlich gelegene konvexe Mengen K und L gibt derart, daß $A \subseteq H + K$, $B \subseteq I + L$ und $\mu(A) = \mu(H + K)$, $\mu(B) = \mu(I + L)$ ist, wenn also A und B aus $H + K$ und $I + L$ durch Weglassen von Nullmengen entstehen.

Mit diesen Sätzen dürfte die Frage nach dem Maß der Summenmenge $A + B$ in einer lokalkompakten abelschen Gruppe einigermaßen vollständig beantwortet sein. Offen blieb die Frage nach den Grenzfällen in den Formeln (1), (2), (3) für solche Gruppen, die eigentliche offene kompakte Untergruppen enthalten, insbesondere für total unzusammenhängende Gruppen. Wir wollen diese Frage hier nicht weiter behandeln, sondern zum Schluß in § 6 versuchen, einen Zusammenhang mit den Dichtesätzen der additiven Zahlentheorie herzustellen. Für den MANNSchen Satz über die finite (SCHNIRELMANNsche) Dichte [7] scheint dies nicht in natürlicher Weise zu gehen, da die finite Dichte weder translationsinvariant ist noch geeignete Additivitätseigenschaften besitzt. Dagegen ist es für die asymptotische Dichte [5] jedenfalls teilweise möglich, und zwar mittels des folgenden Verfahrens, das dem in [11] eingeschlagenen Weg entgegengesetzt ist. Wir denken uns die additive Halbgruppe E der natürlichen Zahlen in eine kompakte Gruppe G eingebettet. Dann können wir die asymptotische Dichte gewisser Teilmengen von E mit dem HAARSchen Maß gewisser Teilmengen von G in Verbindung bringen. Dieses Verfahren können wir auch auf andere Halbgruppen anwenden; wir wollen daher die Eigenschaft der asymptotischen Dichte, auf der es beruht, herausstellen. Die asymptotische Dichte einer Menge A kann man als einen Mittelwert ihrer charakteristischen Funktion φ_A auffassen. Ordnet man nämlich jeder beschränkten Funktion f die Zahl $Mf = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \sum_{i=1}^k f(i)$ zu, so ist $M\varphi_A$ die untere asymptotische Dichte von A . Der Mittelwert M hat dabei die folgende Eigenschaft.

^{4a)} Wie mir Herr MACBEATH brieflich mitteilte, ist dies ein Spezialfall eines allgemeineren, auch für nichtkommutative Gruppen F gültigen Satzes.

(M) a_i, b_k seien endlich viele Elemente aus E ; c_i, d_k ebenso viele positive reelle Zahlen. Gilt für alle x aus E die Ungleichung $\sum_i c_i f(x + a_i) \leq \sum_k d_k g(x + b_k)$, so folgt $\sum_i c_i Mf \leq \sum_k d_k Mg$.

Wir nehmen nun gleich an, E sei eine abelsche Halbgruppe, jeder beschränkten Funktion f auf E sei ein Mittelwert Mf zugeordnet und dieser habe die Eigenschaft (M). Wir nennen dann $\delta(A) = M\varphi_A$ die Dichte von A und δ eine Dichtefunktion auf E . Weiter nehmen wir an, E liege dicht in einer kompakten Gruppe G . Zwischen der Dichte δ und dem HAARSchen Maß μ , die wir uns durch $\delta(E) = \mu(G) = 1$ normiert denken, besteht dann folgender Zusammenhang. A sei eine Teilmenge von G , die das gleiche Maß hat wie ihre abgeschlossene Hülle und wie die Menge ihrer inneren Punkte; wir wollen sie im JORDANSchen Sinne meßbar oder kurz J -Menge nennen; dann gilt (Hilfssatz 10) $\delta(A \cap E) = \mu(A)$. Nun ist es leicht, aus dem Satz 1 über das HAARSche Maß eine entsprechende Aussage über die Dichte δ zu gewinnen.

Dazu noch zwei Abkürzungen. Zwei Mengen A und B aus E nennen wir verwandt, und schreiben $A \approx B$, wenn es Elemente h und k in E gibt derart, daß $A + h$ in B und $B + k$ in A enthalten ist. Wegen (M) folgt daraus $\delta(A) = \delta(B)$. Eine Unter-Halbgruppe von E heiße ausgezeichnet, wenn sie sich als Durchschnitt von E mit einer offenen Untergruppe von G schreiben läßt. Dann gilt der

Satz 6. Die abelsche Halbgruppe E mit der Dichtefunktion δ liege dicht in der kompakten Gruppe G mit dem HAARSchen Maß μ , A und B seien zwei J -Mengen aus G und $C = A \cap E$, $D = B \cap E$. Dann gilt entweder

$$(8) \quad \delta(C + D) \geq \delta(C) + \delta(D)$$

oder es gibt eine ausgezeichnete Unter-Halbgruppe F von E mit den Eigenschaften

$$(9) \quad C + D + F \approx C + D,$$

$$(10) \quad \delta(C + D + F) = \delta(C + F) + \delta(D + F) - \delta(F).$$

Nun sind die uns interessierenden Halbgruppen E , z.B. die natürlichen Zahlen, im allgemeinen nicht von vornherein in eine kompakte Gruppe eingebettet. Dagegen können wir voraussetzen, daß in E die Kürzungsregel gilt, so daß die Quotientengruppe Q von E existiert. Jede Gruppe Q kann man nun bis auf Isomorphie auf genau eine Weise in eine kompakte Gruppe G einbetten derart, daß Q in G dicht liegt und sich jeder Charakter von Q zu einem Charakter von G fortsetzen läßt ([13], § 31). Die Durchschnitte von J -Mengen aus G mit E bzw. Q wollen wir fastperiodische⁵⁾ Teilmengen von E bzw. Q nennen. Die ausgezeichneten Unter-Halbgruppen von E sind hier

⁵⁾ Die fastperiodischen Funktionen auf Q sind genau diejenigen, die sich zu stetigen Funktionen von G fortsetzen lassen ([13], § 34). Die charakteristische Funktion einer fastperiodischen Teilmenge von Q ist zwar im allgemeinen nicht fastperiodisch, läßt sich aber in gewissem Sinne durch fastperiodische Funktionen approximieren.

gerade die Durchschnitte von E mit Untergruppen, die in Q endlichen Index haben. Der Satz 6 ergibt dann den

Satz 6a. *In der abelschen Halbgruppe E sei eine Dichtefunktion δ erklärt, außerdem gelte die Kürzungsregel. Dann gilt für irgend zwei fastperiodische Teilmengen C und D von E die Aussage des Satzes 6.*

Ist speziell E die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen, so haben wir die Aussage des Dichtesatzes über die asymptotische Dichte [5] für eine spezielle Klasse von Mengen vor uns. Diese Klasse ist allerdings sehr eng. Nicht nur stimmen für jede fastperiodische Menge A die obere und untere asymptotische Dichte überein; sondern, wenn $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ eine beliebige Folge von Intervallen der Längen $1, 2, \dots, k, \dots$ und a_k die Anzahl der Elemente von $A \cap I_k$ ist, so existiert der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} a_k$ und ist gleich der asymptotischen Dichte von A . Wählen wir andererseits für E irgendeine Unter-Halbgruppe eines von $n > 1$ linear unabhängigen Vektoren aufgespannten Vektorgitters, z.B. das direkte Produkt der natürlichen Zahlen mit sich selbst, so ist die Klasse der fastperiodischen Mengen zwar auch hier sehr klein; das Ergebnis des Satzes 6a besitzt aber dann insofern Interesse als bisher über diese Fragen in mehreren Dimensionen nur wenige Resultate — für die hier behandelte asymptotische Dichte meines Wissens überhaupt keine — vorliegen⁶⁾.

§ 2. Hilfssätze

Wir stellen zunächst einige Hilfsmittel für die Beweise zusammen und beginnen mit einem kurzen Überblick über das HAARSche Maß. G sei eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Dann gibt es in G ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß μ ([13], § 7). Jeder integrierbaren Teilmenge A von G , insbesondere jeder kompakten Menge, ist also eine Maßzahl $\mu(A) \geq 0$ zugeordnet, ebenso jeder integrierbaren Funktion $f(x)$ auf G , insbesondere jeder stetigen Funktion, die außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, ein Integral $\int f(x) d\mu(x)$ oder kürzer $\int f(x) dx$, und es ist $\mu(A+x) = \mu(A)$ und $\int f(x+a) dx = \int f(x) dx$. Mit $\mu_*(A)$ bezeichnen wir das innere Maß eines beliebigen Teiles A von G , d.h. die obere Grenze der Maße der in A enthaltenen integrierbaren Mengen. Wegen der Eigenschaften von Maß und Integral vergleiche man den Band *Intégration* von N. BOURBAKI [1], dem auch die Bezeichnungen entnommen sind. Außer den allgemeinen Eigenschaften eines Maßes brauchen wir noch den folgenden Zusammenhang zwischen den HAARSchen Maßen μ auf G , μ' auf einer abgeschlossenen Untergruppe G' von G und $\bar{\mu}$ auf der Faktorgruppe $\bar{G} = G/G'$ ([13], § 9), der bei geeigneter Festsetzung der noch freien Faktoren bei μ, μ' und $\bar{\mu}$ gilt. Sei $f(x)$ eine μ -integrierbare Funktion auf G , $\bar{x}$ die Restklasse von x modulo G' . Dann existiert das Integral $\int f(x+x') d\mu'(x')$ für jedes x , dessen Restklasse $\bar{x}$ nicht in einer gewissen $\bar{\mu}$ -Nullmenge liegt. Sein Wert hängt nur von $\bar{x}$, nicht von x selbst ab und sei mit $g(\bar{x})$ bezeichnet.

⁶⁾ Vgl. [4] und die dort angegebene Literatur.

Dann gilt $\int f(x) d\mu(x) = \int g(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x})$. Weniger genau, aber kürzer:

$$\int f(x) d\mu(x) = \int d\bar{\mu}(\bar{x}) \int f(x+x') d\mu'(x').$$

Für eine μ -integrierbare Menge A mit der charakteristischen Funktion $\varphi(x)$ bedeutet das

$$\mu(A) = \int \varphi(x) d\mu(x) = \int d\bar{\mu}(\bar{x}) \int \varphi(x+x') d\mu'(x') = \int \mu'(G' \cap (A-x)) d\bar{\mu}(\bar{x}).$$

Wir beweisen nun einige Hilfssätze, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

Hilfssatz 1. Sind A und B integrierbar, so sind die Funktionen $f(x) = \mu(A \cap (B+x))$ und $g(x) = \mu(A \cup (B+x))$ stetig und es ist $\int f(x) dx = \mu(A)\mu(B)$.

Beweis. Die Behauptungen über f folgen aus [13], § 11, die über g aus der Formel $g(x) = \mu(A) + \mu(B+x) - f(x) = \mu(A) + \mu(B) - f(x)$.

Definition 1. Ein Punkt a einer Menge A heiße *volumfremder Punkt* von A , wenn es eine Umgebung U von a gibt derart, daß der Durchschnitt $U \cap A$ das Maß null hat.

Hilfssatz 2. Die Menge B der volumfremden Punkte einer integrierbaren Menge A hat das Maß null.

Beweis. B ist offen in A und daher integrierbar. Wäre $\mu(B) > 0$, so gäbe es einen kompakten Teil C von B mit positivem Maß. Zu jedem Punkt aus C gibt es eine Umgebung U mit $\mu(U \cap A) = 0$, also $\mu(U \cap C) = 0$. Endlich viele davon überdecken C , was $\mu(C) = 0$ zur Folge hätte, im Widerspruch zur Annahme.

Hilfssatz 3. A sei abgeschlossen, B enthalte keine volumfremden Punkte, und B liege bis auf eine Nullmenge in A . Dann liegt B ganz in A .

Beweis. Ein Punkt von B , der in dem offenen Komplement U von A läge, wäre wegen $\mu(U \cap B) = 0$ ein volumfremder Punkt von B .

Definition 2. Wir nennen zwei Mengen A und B *äquivalent*, in Zeichen $A \sim B$, wenn sie sich nur um Nullmengen unterscheiden, wenn also die Differenz ihrer charakteristischen Funktionen das Nullelement des Funktionenraumes L^1 darstellen.

Aus $A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$ und wegen der Translationsinvarianz des HAARSchen Maßes $A+x \sim B+x$. Für integrierbare Mengen A und B ist $A \sim B$ gleichbedeutend mit $\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B)$ oder auch mit $\mu(A) = \mu(A \cup B) = \mu(B)$.

Hilfssatz 4. A sei integrierbar mit positivem Maß. $H(A)$ sei die Menge aller $x \in G$ mit $A+x \sim A$. Dann ist $H(A)$ eine kompakte Untergruppe von G .

Beweis. Aus $A+x \sim A \sim A+y$ folgt $A+(x-y) \sim A$. $H(A)$ ist also eine Untergruppe von G . $H(A)$ ist die Menge aller x mit $\mu(A \cup (A+x)) = \mu(A)$, also nach Hilfssatz 1 abgeschlossen. Für den Nachweis, daß $H(A)$ kompakt ist, wählen wir einen kompakten Teil B von A mit $\mu(B) > \frac{1}{2}\mu(A)$. B und $B+x$ liegen in $A \cup (A+x)$. Ist nun $A+x \sim A$, so folgt aus $\mu(B) + \mu(B+x) = 2\mu(B) > \mu(A) = \mu(A \cup (A+x))$, daß B und $B+x$ ein gemeinsames Element enthalten: $b+x=b'$. Jedes Element $x=b'-b$ aus $H(A)$ liegt also in der kompakten Menge $B-B$, und daher ist $H(A)$ kompakt wie behauptet.

Die weiteren Hilfssätze sind für den Beweis des Satzes 1 nicht nötig; sie werden erst in § 4 bei der Diskussion der Grenzfälle gebraucht.

Hilfssatz 5. *Ist A integrierbar und entsteht C aus B durch Hinzufügen endlich vieler Punkte der abgeschlossenen Hülle von B , so ist $A + C \sim A + B$.*

Beweis. Ist c einer der endlich vielen Punkte aus C , die nicht in B liegen, so gilt

$$\mu((A+c) \cap (A+B)) = \lim_{x \rightarrow c, x \in B} \mu((A+x) \cap (A+B)) = \lim_{x \rightarrow c} \mu(A+x) = \mu(A+c).$$

$A+c$ liegt also bis auf eine Nullmenge schon in $A+B$.

Hilfssatz 6. *A , B und $A+B$ seien integrierbar und $\mu(A+B) \leq \mu(A) + b$. Dann gilt für x und y aus B die Ungleichung*

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^n ((A+B) + i(y-x))\right) \leq \mu(A+B) + nb.$$

Beweis. A ist in $A+B-x$ und in $A+B-y$ enthalten. Der Teil von $A+B-x$, der nicht in $A+B-y$ liegt, hat daher höchstens das Maß $\mu(A+B-x) - \mu(A) \leq b$. Durch Translation um $x+i(y-x)$ erhält man die gleiche Aussage für den Teil C_i von $A+B+i(y-x)$, der nicht schon in $A+B+(i-1)(y-x)$ liegt ($i=1, 2, \dots, n$). Wegen

$$\bigcup_{i=0}^n ((A+B) + i(y-x)) = (A+B) \cup \bigcup_{i=1}^n C_i$$

folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Ist $0 < \mu(A) < \infty$ und G' eine abgeschlossene Untergruppe der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H(A)$, so gibt es in der Faktorgruppe $\bar{G} = G/G'$ eine integrierbare Teilmenge $\tilde{A}$ und eine Nullmenge $\tilde{B}$ derart, daß*

$$\mu(G' \cap (A-x)) = \begin{cases} \mu(G') & \text{für } \bar{x} \in \tilde{A} \\ 0 & \text{für } \bar{x} \notin \tilde{A} \cup \tilde{B}. \end{cases}$$

Beweis. In dem direkten Produkt $G \times G'$ sei C die Menge der Paare (z, t) mit $z \in A$ und $z+t \in A$. Ihre charakteristische Funktion $\varphi_C(z, t)$ läßt sich durch φ_A ausdrücken: $\varphi_C(z, t) = \varphi_A(z) \varphi_A(z+t)$. Für das Maß von C erhalten wir daher den Ausdruck $\iint \varphi_C(z, t) d\mu(z) d\mu'(t) = \int \mu(A \cap (A-t)) d\mu'(t)$. Wegen $t \in G' \subseteq H(A)$ hat der Integrand den Wert $\mu(A)$, das Integral also den Wert $\mu(A) \mu'(G')$. Führen wir für die nur von der Restklasse $\bar{x}$ von x abhängige Funktion $\mu'(G' \cap (A-x))$ die Bezeichnung $g(\bar{x})$ ein, so gilt nach dem zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten $\mu(A) = \int g(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x})$ und damit erhalten wir das Maß von C zu $\int \mu'(G') g(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x})$. Wir können das Maß von C aber auch anders berechnen, indem wir in $\varphi_C(z, t)$ gleich $z = x+y$ setzen mit $y \in G'$ und zuerst über y integrieren. Das gibt

$$h(\bar{x}, t) = \int \varphi_A(x+y) \varphi_A(x+y+t) d\mu'(y) = \mu'(G' \cap (A-x) \cap (A-x-t)).$$

$h(\bar{x}, t)$ nach t integriert ergibt nach Hilfssatz 1

$$\int h(\bar{x}, t) d\mu'(t) = \mu'(G' \cap (A-x))^2 = g(\bar{x})^2.$$

Integration nach $\bar{x}$ liefert schließlich $\int g(\bar{x})^2 d\bar{\mu}(\bar{x})$. Durch Vergleich der beiden Ergebnisse erhält man $\int (\mu'(G') - g(\bar{x})) g(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}) = 0$. Da der Integrand nicht negativ ist, verschwindet er außer auf einer Nullmenge $\tilde{B}$. Also ist $g(\bar{x}) = \mu'(G')$ auf einer Menge $\tilde{A}$, $g(\bar{x}) = 0$ auf dem Komplement von $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, und mit $g(\bar{x})$ ist auch $\tilde{A}$ integrierbar.

§ 3. Der Additionssatz

Die Grundlage für die folgenden Beweise bilden, wie in der Arbeit [5], die e -Transformationen, über die wir daher zunächst alles Nötige zusammenstellen. Der Grundgedanke ist der, daß sich unser Problem nicht wesentlich ändert, wenn man die Mengen A und B durch ihre Vereinigung $A' = A \cup B$ und ihren Durchschnitt $B' = A \cap B$ ersetzt. Diese Tatsache beruht auf den beiden Formeln

$$(11) \quad \mu(A') + \mu(B') = \mu(A) + \mu(B),$$

$$(12) \quad A' + B' \subseteq A + B.$$

Die erste folgt aus den Eigenschaften des Maßes und die zweite ergibt sich so:

$$(A \cup B) + (A \cap B) = (A + (A \cap B)) \cup (B + (A \cap B)) \subseteq (A + B) \cup (B + A) = A + B.$$

Diese Transformation kann man noch verallgemeinern, indem man zunächst auf den zweiten Summanden B eine Translation um ein Gruppenelement e anwendet, dann Vereinigung und Durchschnitt bildet und schließlich auf den Durchschnitt die Translation um $-e$ anwendet. Von A und B ausgehend gelangt man so zu

$$A' = A \cup (B + e) \quad \text{und} \quad B' = (A - e) \cap B.$$

Für diese Mengen gelten wegen der Translationsinvarianz des HAARSchen Maßes wieder die Formeln (11) und (12). Setzen wir zusätzlich voraus, daß das Nullelement in A und B enthalten ist und daß e in A liegt, so gilt auch

$$(13) \quad 0 \in A', \quad 0 \in B'.$$

Wir sagen dann, A' und B' entstehen aus A und B durch eine e -Transformation. Auf A' und B' können wir wieder eine e -Transformation (mit einem anderen e' aus A' statt e) anwenden und das können wir mehrfach wiederholen. Für alle so entstehenden Mengenpaare — wir wollen sie von A und B abgeleitet nennen — gelten die Formeln (11) bis (13). Aus diesen Formeln folgt die Abschätzung

$$(14) \quad \mu_*(A + B) \geq \mu_*(A' + B') \geq \mu(A') = \mu(A) + \mu(B) - \mu(B').$$

Wir bezeichnen jetzt mit $f(A, B)$ die untere Grenze der Maße $\mu(B')$ für alle von A, B abgeleiteten Mengenpaare A', B' . Zum Beweise des Satzes 1 unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: $f(A, B) = 0$. Dann folgt aus (14) die Ungleichung (1) und wir sind fertig.

Zweiter Fall: $f(A, B) > 0$. Dann wählen wir zunächst ein abgeleitetes Paar A', B' aus, für das $\mu(B') < f(A, B) + 2^0$ ist, dann ein von A', B' abgeleitetes

Paar A'', B'' mit $\mu(B'') < f(A', B') + 2^{-1}$ und fahren so fort; allgemein sei A^{n+1}, B^{n+1} von A^n, B^n abgeleitet, und es gelte

$$(15) \quad \mu(B^{n+1}) < f(A^n, B^n) + 2^{-n}.$$

Dann bilden die Mengen $A, A', A'', \dots$ eine aufsteigende, $B, B', B'', \dots$ eine absteigende Folge. Die Mengen $A^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ und $B^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B^n$ haben drei wichtige Eigenschaften. Erstens bleiben ersichtlich die Formeln (11) bis (14) richtig, wenn man A' und B' durch A^∞ und B^∞ ersetzt. Zweitens ist A^n, B^n von A, B abgeleitet; also gilt $\mu(B^n) \geq f(A, B) > 0$ und es folgt

$$(16) \quad \mu(B^\infty) > 0.$$

Drittens gilt für jedes e aus A^∞ die Gleichung

$$(17) \quad \mu((A^\infty - e) \cap B^\infty) = \mu(B^\infty).$$

e liegt nämlich für genügend großes n in A^n . Nach Definition von $f(A^n, B^n)$ gilt dann die Ungleichung $\mu((A^n - e) \cap B^n) \geq f(A^n, B^n)$, also wegen $A^n \subseteq A^\infty$ und (15) auch $\mu(B^n) \geq \mu((A^\infty - e) \cap B^n) \geq \mu(B^{n+1}) - 2^{-n}$. Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt die Gleichung (17). Sie besagt, daß die Funktion $f(x) = \mu((A^\infty - x) \cap B^\infty) = \mu(A^\infty \cap (B^\infty + x))$ auf A^∞ den Wert $\mu(B^\infty)$ annimmt. Nach Hilfssatz 1 folgt $\int_G f(x) dx = \mu(A^\infty) \mu(B^\infty) = \int_E f(x) dx$, also $\int_E f(x) dx = 0$

für jede zu A^∞ fremde Menge E , insbesondere für die Menge E der x mit $0 < f(x) < \mu(B^\infty)$. Da $f(x)$ auf E positiv ist gilt $\mu(E) = 0$; $f(x)$ ist nach Hilfssatz 1 stetig, E also offen und daher leer. Die Funktion $f(x)$ nimmt also nur die Werte 0 und $\mu(B^\infty)$ an. Daher ist die Menge C der x mit $f(x) = \mu(B^\infty)$ offen und abgeschlossen; sie enthält die Menge A^∞ und hat das gleiche Maß wie diese, ist also deren abgeschlossene Hülle. Außer C betrachten wir noch die Menge D der nicht volumfremden Punkte von B^∞ . Nach Hilfssatz 2 hat sie das gleiche Maß wie B^∞ und besitzt keine volumfremden Punkte. Wir greifen jetzt auf die Formel (17) zurück. Sie besagt, daß B^∞ , und daher erst recht D , für jedes e aus A^∞ bis auf eine Nullmenge in $A^\infty - e$, und daher erst recht in $C - e$ liegt. Nach Hilfssatz 3 folgt daraus $D \subseteq C - e$ für jedes e aus A^∞ , d.h. $A^\infty + D \subseteq C$, und da C die abgeschlossene Hülle von A^∞ ist, schließlich $C + D \subseteq C$. D liegt also in der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H = H(C)$. Wegen $\mu(H) \geq \mu(D) = \mu(B^\infty) > 0$ ist H offen ([13], § 11). Für jedes $h \in H$ gilt nach Definition $C + h \sim C$. Da $C + h$ als offene Menge keine volumfremden Punkte besitzt und C außerdem abgeschlossen ist, folgt hieraus nach Hilfssatz 3 $C + h \subseteq C$, also $C + H = C$. Weiter gilt

$$\mu(C) = \mu(A^\infty) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(B^\infty) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H).$$

Schließlich zeigen wir noch, daß C in $A + B$ enthalten ist. Liegt nämlich c in C , so ist $c - D \subseteq c - H \subseteq C + H = C$; es folgt

$$\mu(A^\infty \cap (c - B^\infty)) = \mu(C \cap (c - D)) = \mu(c - D) = \mu(D) > 0.$$

$A^\infty \cap (c - B^\infty)$ ist also nicht leer, d.h. c liegt in $A^\infty + B^\infty \subseteq A + B$ wie behauptet. Zusammengefaßt haben wir den

Satz 1b. Ist die Null in A und B enthalten, so gilt entweder die Ungleichung

$$(1) \quad \mu_*(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B),$$

oder es gibt einen die Null enthaltenden Teil C von $A + B$ und eine offene kompakte Untergruppe $H = H(C)$ von G mit den Eigenschaften

$$(18) \quad C + H = C,$$

$$(19) \quad \mu(C) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H).$$

Dieser Satz entspricht der Aussage IV aus [5] S. 468. Ebenso wie dort die Aussage II S. 464 folgt hier der

Satz 1c. Gilt die Ungleichung (1) nicht, so gibt es zu jeder endlichen Teilmenge E von $A + B$ einen E umfassenden Teil $C = C(E)$ von $A + B$ und eine offene kompakte Untergruppe $H = H(C(E))$ von G mit den Eigenschaften (18) und (19).

Dabei entnimmt man der Konstruktion der Mengen $C(E)$, daß $C(E \cup F) = C(E) \cup C(F)$ ist; die Abbildung $E \rightarrow C(E)$ ist also monoton, und wegen $E \subseteq C(E)$ folgt $A + B = \bigcup_E C(E)$. Die Mengen $C(E)$ sind außerdem wegen (18) offen.

Ist daher $\mathfrak{S}$ das System aller endlichen Teilmengen von $A + B$ mit der Inklusion als Ordnung, so folgt nach [1] chap. IV, § 1, prop. 7 die Gleichung $\sup_{E \in \mathfrak{S}} \mu(C(E)) = \mu(A + B)$. Insbesondere gibt es eine endliche Menge D mit $\mu(C(D)) > \mu(A + B) - (\mu(A) + \mu(B) - \mu(A + B))$. Wir zeigen, daß dann für $E \supseteq D$ sicher $H(C(E)) \supseteq H(C(D))$ gilt. Aus $D \subseteq E$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} \mu(C(E)) &\leq \mu(A + B) < \mu(C(D)) + \mu(A) + \mu(B) - \mu(A + B) \\ &\leq \mu(C(D)) + \mu(A) + \mu(B) - \mu(C(E)) \leq \mu(C(D)) + \mu(H(C(E))). \end{aligned}$$

Jede in $C(E)$ enthaltene Restklasse modulo $H(C(E))$ enthält also ein Element aus $C(D)$, d.h. es ist $C(E) = C(D) + H(C(E))$. Daraus folgt,

$$C(E) + H(C(D)) = C(D) + H(C(D)) + H(C(E)) = C(D) + H(C(E)) = C(E),$$

also $H(C(D)) \subseteq H(C(E))$ und weiter $A + B + H(C(D)) = \bigcup_{E \supseteq D} (C(E) + H(C(D))) = \bigcup_{E \supseteq D} C(E) = A + B$. Das ist die Formel (2) mit $H = H(C(D))$ und entspricht der Aussage I S. 464 aus [5]. Der Satz 1 folgt nun so wie in [5] der Dichtesatz.

§ 4. Die Grenzfälle

Wir setzen jetzt G kompakt und zusammenhängend voraus, so daß der Satz 1 in den Satz 1a übergeht, und wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen in der Ungleichung (5) das Gleichheitszeichen steht, wann also

$$(20) \quad \mu_*(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$$

ist. Daß dies unter den Voraussetzungen des Satzes 2 der Fall ist, wurde schon in § 1 gezeigt. Es bleibt die Umkehrung zu beweisen. Wir setzen also voraus, daß $\mu(A)$ und $\mu(B)$ positiv sind, daß $\mu(A) + \mu(B) < \mu(G)$ ist und die Gleichung (20) gilt. Wir zeigen anschließend, daß es dann einen Homomorphismus χ von G auf die eindimensionale Torusgruppe T und zwei abgeschlossene Intervalle K und L in T gibt derart, daß A und B äquivalent zu $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ sind. Die volle Aussage des Satzes 2 ergibt sich dann so: Ist c ein innerer Punkt von $\chi^{-1}(K+L)$, also $\chi(c)$ innerer Punkt von $K+L$, so haben die Intervalle K und $\chi(c) - L$ innere Punkte gemeinsam. Das Maß $\bar{\mu}$ von $K \cap (\chi(c) - L)$ in T ist also positiv und damit auch ([13], § 9)

$$\mu(A \cap (c - B)) = \mu(\chi^{-1}(K) \cap (c - \chi^{-1}(L))) > 0,$$

also $c \in A + B$. Abgesehen von einer Nullmenge liegt demnach $\chi^{-1}(K) + \chi^{-1}(L) = \chi^{-1}(K+L)$ in $A + B$. Ist nun d nicht in $\chi^{-1}(K)$ gelegen, so gilt

$$\begin{aligned} \mu((\chi^{-1}(K) \cup \{d\}) + \chi^{-1}(L)) &= \bar{\mu}((K \cup \{\chi(d)\}) + L) > \bar{\mu}(K + L) \\ &= \bar{\mu}(K) + \bar{\mu}(L) = \mu(\chi^{-1}(K)) + \mu(\chi^{-1}(L)), \end{aligned}$$

also auch $\mu((A \cup \{d\}) + B) > \mu(A) + \mu(B)$. Wegen (20) liegt d also sicher nicht in A , d. h. es gilt $A \subseteq \chi^{-1}(K)$ und ebenso $B \subseteq \chi^{-1}(L)$. Das ist aber gerade die noch fehlende Aussage des Satzes 2.

Zum Beweis der Behauptungen $A \sim \chi^{-1}(K)$ und $B \sim \chi^{-1}(L)$ ersetzen wir A und B durch Teilmengen von gleichem Maß, die sich als Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Mengen schreiben lassen. Das ändert Voraussetzung und Behauptung nicht, denn es werden ja nur Nullmengen weggelassen, und die linke Seite der Gleichung (20) kann sich nach (5) nicht verkleinern. Dadurch erreichen wir, daß auch die Summe eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen und daher integrierbar ist. Wir können also in (20) den Stern weglassen. Dann bilden wir die in § 2 definierte Untergruppe $H(A+B)$ der x mit $A+B+x \sim A+B$ und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob $H(A+B)$ nur aus der Null besteht oder ein von null verschiedenes Element enthält. Im ersten Fall werden wir zeigen, daß G isomorph T ist, während A und B äquivalent zu zwei Intervallen sind. Den zweiten Fall führen wir dann durch Restklassenbildung modulo $H(A+B)$ auf den ersten zurück.

Erster Fall: $H(A+B) = \{0\}$, d. h. es gibt kein $x \neq 0$ mit $A+B+x \sim A+B$. Wir verwenden wieder die Begriffe e -Transformation und abgeleitete Menge, allerdings in einem etwas weiteren Sinn als in § 3. Wir wollen nämlich nicht mehr voraussetzen, daß $0 \in A \cap B$ und $e \in A$ ist. Dann gilt natürlich auch (13) nicht mehr, aber die Formeln (11) und (12) behalten ihre Gültigkeit, und ebenso verhält es sich mit den durch mehrfache Anwendung solcher allgemeinerer e -Transformationen erhaltenen abgeleiteten Mengenpaaren. Das Maß einer abgeleiteten Menge $B' = (A - e) \cap B$ ist

$$\mu((A - e) \cap B) = \mu(A \cap (B + e)) = f(e).$$

Aus Hilfssatz 1 folgt die Ungleichung

$$\mu(G) \min_x f(x) \leq \mu(A) \mu(B) \leq \mu(G) \max_x f(x).$$

Es gibt also Elemente x , für die $f(x) \leq \mu(A) \mu(B) \mu(G)^{-1} < \gamma \mu(B)$ mit $\gamma = (\mu(A) + \mu(B)) \mu(G)^{-1} < 1$ ist, und solche, für die

$$f(x) \geq \mu(A) \mu(B) \mu(G)^{-1} > 0$$

gilt. Da G zusammenhängend und f stetig ist, gibt es auch ein x , das beiden Ungleichungen genügt: $0 < f(x) < \gamma \mu(B)$. Bei geeigneter Wahl von ϵ wird also $0 < \mu(B') < \gamma \mu(B)$. Da die Konstante γ nach (11) für alle abgeleiteten Mengen die gleiche ist, erhält man durch n -malige Anwendung ein abgeleitetes Mengenpaar A^n, B^n mit $0 < \mu(B^n) < \gamma^n \mu(B)$, also

$$(21) \quad \mu(B^n) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B^n) = 0^7).$$

Von den weiteren Eigenschaften dieser Mengen brauchen wir im folgenden nur noch die aus (11) fließende Gleichung

$$(22) \quad \mu(A^n) + \mu(B^n) = \mu(A) + \mu(B)$$

und die aus (12) und $\mu(A^n + B^n) \geq \mu(A^n) + \mu(B^n) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A + B)$ folgende Äquivalenz

$$(23) \quad A^n + B^n \sim A + B.$$

Wir beweisen nun nacheinander einige Eigenschaften dieser Mengen, die uns schließlich zu dem gewünschten Resultat führen werden.

1. Zu jeder Umgebung U der Null in G gibt es ein m derart, daß $B^n - B^n$ in U liegt für $n > m$.

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es wegen $B^n \subseteq B^{n-1}$ zwei Folgen von Punkten x_n, y_n aus B^n mit $y_n - x_n \notin U$. Da G kompakt ist, besitzt die Folge (x_n, y_n) in $G \times G$ einen Häufungspunkt (x, y) , und dabei ist $y - x \neq 0$ wegen $y_n - x_n \notin U$. Nun ist A^n in dem Durchschnitt $(A^n + B^n - y_n) \cap (A^n + B^n - x_n)$ enthalten. Nach Hilfssatz 1 und den Formeln (23) und (20) bis (22) folgt daher die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu((A + B) \cap (A + B + y - x)) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((A + B) \cap (A + B + y_n - x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((A^n + B^n - y_n) \cap (A^n + B^n - x_n)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A^n) \\ &= \mu(A) + \mu(B) = \mu(A + B), \end{aligned}$$

also $(A + B) + (y - x) \sim A + B$, entgegen der Annahme $H(A + B) = \{0\}$.

⁷⁾ Führt man diese Konstruktion mit zwei beliebigen integrierbaren Mengen A und B durch, so erhält man einen einfachen direkten Beweis für die Formel (5) des Satzes 1a:

$$\begin{aligned} \mu_*(A + B) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(A^n + B^n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A^n) + \mu(B^n)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B^n) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Da die Formel (6) sehr leicht einzusehen ist, hat man so auch einen direkten Beweis für den ganzen Satz 1a.

2. χ sei ein echter additiver Charakter von G , d.h. ein Homomorphismus von G auf die additive Gruppe T der reellen Zahlen R modulo eins. Sind a und b zwei reelle Zahlen, $a < b \leq a + 1$, so verstehen wir unter $I(a, b)$ das abgeschlossene Intervall in T , das aus den Restklassen der Zahlen zwischen a und b besteht. Wenn wir das Maß auf T so normieren, daß die ganze Gruppe das Maß 1 hat, so hat $I(a, b)$ das Maß $b - a$. Wie aus Nr. 1 hervorgeht, liegen die Mengen $\chi(B^n - B^n)$ in Intervallen $I(-a_n, a_n)$, deren Längen $2a_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen null gehen. Wählt man a_n minimal, so gilt $a_n \equiv (y_n - x_n) \bmod 1$ mit Elementen x_n und y_n aus der abgeschlossenen Hülle von B^n . Fügen wir die Punkte x_n und y_n zu B^n hinzu, so gelten für die neuen Mengen wieder die Formeln (21), (22) und nach Hilfssatz 5 auch (23). Da wir nur diese Eigenschaften brauchen, setzen wir von jetzt ab $x_n, y_n \in B^n$ voraus. Wir wollen nun die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ verschärfen zu

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \mu(B^n) = c > 0.$$

Dazu wählen wir die natürliche Zahl c_n so, daß $\frac{1}{3} \leq c_n a_n \leq \frac{2}{3}$ wird. Wäre nun der Grenzwert (24) null, so wäre auch $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \mu(B^n) = 0$. Durch Übergang zu einer Teilfolge und Umnumerierung können wir $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \mu(B^n) = 0$ erreichen. Ist z ein Häufungspunkt der Folge $c_n(y_n - x_n)$, so liegt mit $\chi(c_n(y_n - x_n)) \equiv c_n a_n$ auch $\chi(z)$ in $I(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, so daß $z \neq 0$ folgt. Nun gilt $A^n + B^n \sim A + B$, also nach Hilfssatz 1 und 6

$$\begin{aligned} \mu((A + B) \cup (A + B + z)) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ((A^n + B^n) \cup (A^n + B^n + c_n(y_n - x_n))) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A^n + B^n) + c_n \mu(B^n)) = \mu(A + B), \end{aligned}$$

d.h. $A + B + z \sim A + B$, im Widerspruch zur Annahme $H(A + B) = \{0\}$.

3. Der Kern G' des Homomorphismus χ ist diskret.

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus § 2, also μ' das HAARSche Maß auf G' , $\bar{\mu}$ das auf $T \cong G/G'$. Wäre nun G' nicht diskret, so gäbe es zu der positiven Zahl c aus (24) eine Umgebung U' der Null in G' mit $\mu'(U') < c/2$. Nach Nr. 1 gäbe es ein m derart, daß $G' \cap (B^n - B^n) \subseteq U'$, also $\mu'(G' \cap (B^n - B^n)) < c/2$ für $n > m$. Nun ist nach § 2 $\mu(B^n) = \int \mu'(G' \cap (B^n - x)) d\bar{\mu}(\bar{x})$. Der Integrand verschwindet nur dann nicht, wenn x in $B^n + G'$, also $\bar{x}$ in $\chi(B^n)$ liegt. Wegen der Translationsinvarianz von μ' können wir sogar $x \in B^n$ annehmen und erhalten damit $\mu(B^n) \leq \int_{\chi(B^n)} \mu'(G' \cap (B^n - B^n)) d\bar{\mu}(\bar{x}) \leq a_n c/2$ im Widerspruch zu (24). G' ist also diskret und G daher lokal isomorph zu T . Da G kompakt ist folgt

4. G ist isomorph der eindimensionalen Torusgruppe T .

Wir setzen daher von jetzt ab voraus, daß G gleich T und χ die identische Abbildung ist. Im übrigen behalten wir die Bezeichnungen aus Nr. 2 bei, nur wollen wir gelegentlich Elemente aus T mit ihren Vertretern in R identifizieren; so sollen z.B. x_n und y_n auch zwei reelle Zahlen mit der Differenz

$y_n - x_n = a_n$ bedeuten. Dann gilt $B^n \subseteq I(x_n, y_n)$. Es sei jetzt C eine integrierbare Menge in T . Einen Punkt v nennen wir einen Grenzpunkt von C , wenn

$$(25) \quad \mu(C \cap I(v - s, v)) > 0$$

für jedes positive s und

$$(26) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1} \mu(C \cap I(v, v + t)) = 0$$

ist. Dann beweisen wir

5. $A + B$ besitzt höchstens einen Grenzpunkt.

v sei ein Grenzpunkt von $A + B$, c der positive Grenzwert aus (24); $t > 0$ so klein, daß $t^{-1} \mu((A + B) \cap I(v, v + t)) < c/4$; $s > 0$ so klein, daß auch noch $t^{-1} \mu((A + B) \cap I(v - s, v + t)) < c/4$. Wegen $A^n + x_n \subseteq A^n + B^n \sim A + B$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A^n + x_n) = \mu(A + B)$ folgt nach (25) $\mu((A^n + x_n) \cap I(v - s, v)) > 0$ für genügend große n . Es gibt also ein $z_n \in A^n + x_n$ mit $v - s \leq z_n \leq v$. Wir bezeichnen mit $k = k_n$ die größte ganze Zahl, für die $z_n + k_n(y_n - x_n) \leq v + t$, so daß also $(k_n + 1)a_n = (k_n + 1)(y_n - x_n) > v + t - z_n \geq t$, und betrachten die Menge $C^n = A^n + \bigcup_{i=0}^{k-1} (B^n + i(y_n - x_n))$. C^n enthält die getrennt liegenden Mengen $z_n - x_n + B^n + i(y_n - x_n)$ für $i = 0, 1, \dots, k_n - 1$ und diese liegen wegen der Wahl von k_n in $I(v - s, v + t)$. Der Teil von C^n , der in $I(v - s, v + t)$ aber nicht in $A^n + B^n \sim A + B$ liegt, hat also mindestens das Maß

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \mu(z_n - x_n + B^n + i(y_n - x_n)) - \mu((A + B) \cap I(v - s, v + t)) \\ \geq k_n \mu(B^n) - t c / 4 \geq k_n \mu(B^n) - (k_n + 1) a_n c / 4. \end{aligned}$$

Für genügend großes n ist $(k_n + 1)/2k_n \leq 3/4 < 1$ und daher nach (24) $(k_n + 1)a_n c < 2k_n \mu(B^n)$, also das gesuchte Maß größer als $\frac{1}{2}k_n \mu(B^n)$. Gäbe es nun zwei verschiedene Grenzpunkte, so könnte man diese Konstruktion für beide durchführen, und zwar so, daß die Intervalle $I(v - s, v + t)$ nicht übereinandergreifen. Man erhielte dann

$$\mu\left(A^n + \bigcup_{i=0}^{k-1} (B^n + i(y_n - x_n))\right) = \mu(C^n) > \mu(A^n + B^n) + k_n \mu(B^n)$$

im Gegensatz zu der Aussage des Hilfssatzes 6, die wegen

$$\mu(A^n + B^n) = \mu(A^n) + \mu(B^n)$$

so lautet:

$$\mu(C^n) \leq \mu(A^n + B^n) + (k_n - 1) \mu(B^n).$$

6. $A + B$ besitzt mindestens einen Grenzpunkt.

Das folgt daraus, daß nach Voraussetzung $0 < \mu(A + B) < \mu(G)$ ist. Danach gibt es nämlich zwei getrennt liegende Intervalle K und L mit $\mu((A + B) \cap K) > 0$ und $\mu((A + B) \cap L) < \mu(L)$. Durch Einbettung von K

und L in aneinander grenzende Intervalle kann man drei Zahlen $x < y < z \leq x + 1$ finden mit $\mu((A + B) \cap I(x, y)) > 0$ und $\mu((A + B) \cap I(y, z)) < \mu(I(y, z))$. Die Behauptung folgt nun aus dem

Hilfssatz 8. *Ist $x < y < z \leq x + 1$, C integrierbar und $\mu(C \cap I(x, y)) > 0$, $\mu(C \cap I(y, z)) < \mu(I(y, z))$, so liegt im Inneren des Intervalles $I(x, z)$ mindestens ein Grenzpunkt von C .*

Beweis. Wegen der zweiten Voraussetzung über C gibt es in $I(y, z)$ einen Punkt v , in dem die Dichte von C verschwindet, so daß die Gleichung (26) gilt. Ist (25) erfüllt, so ist v ein Grenzpunkt von C . Anderenfalls sei w die untere Grenze der Zahlen $u < v$ mit $\mu(C \cap I(u, v)) = 0$. w ist offenbar ein Grenzpunkt von C und liegt wegen der ersten Voraussetzung über C im Inneren von $I(x, z)$.

7. $A + B$ ist äquivalent zu einem Intervall.

v sei ein Grenzpunkt von $A + B$ und z die untere Grenze der Zahlen $u \leq v$ mit $\mu((A + B) \cap I(u, v)) = \mu(I(u, v))$. Dann ist $A + B \sim I(z, v)$. Anderenfalls gäbe es nämlich ein zu $I(z, v)$ punktfremdes Intervall $I(x, y)$ mit $\mu((A + B) \cap I(x, y)) > 0$. Nach Definition von z wäre außerdem

$$\mu((A + B) \cap I(y, z)) < \mu(I(y, z)).$$

Im Inneren des Intervalls $I(x, z)$ läge also nach Hilfssatz 8 ein zweiter Grenzpunkt von $A + B$, was der Aussage 6 widerspräche.

8. A und B sind äquivalent zu Intervallen.

Liegt b in B , c in dem Komplement $\mathbf{C}(A + B)$ von $A + B$, so liegt $c - b$ sicher nicht in A , d.h. es gilt $\mathbf{C}(A + B) + (-B) \subseteq \mathbf{C}A$. Wegen

$$\mu(\mathbf{C}(A + B)) + \mu(-B) = 1 - \mu(A + B) + \mu(B) = 1 - \mu(A) = \mu(\mathbf{C}A)$$

folgt nach Satz 1a $\mathbf{C}(A + B) + (-B) \sim \mathbf{C}A$ und nach Nr. 7, angewandt auf $\mathbf{C}(A + B)$ und $-B$ an Stelle von A und B , daß $\mathbf{C}A$ äquivalent zu einem Intervall ist. Also ist auch A und ebenso B äquivalent zu einem Intervall.

Zweiter Fall: $H(A + B) \neq \{0\}$. Zur Abkürzung schreiben wir G' für $H(A + B)$ und bezeichnen mit χ den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/G' = \bar{G}$. Es seien jetzt $\bar{A}$ bzw. $\bar{B}$ bzw. $\bar{C}$ die Menge der $\bar{x} \in \bar{G}$ mit $\mu'(G' \cap (A - x)) > 0$ bzw. $\mu'(G' \cap (B - x)) > 0$ bzw. $\mu'(G' \cap (A + B - x)) > 0$. Ist das Maß μ' durch $\mu'(G') = 1$ normiert, so folgt $\bar{\mu}(\bar{A}) \geq \mu(A)$, $\bar{\mu}(\bar{B}) \geq \mu(B)$ und nach Hilfssatz 7 $A + B \sim \chi^{-1}(\bar{C})$, also $\mu(\bar{C}) = \mu(A + B)$. Außerdem ist $\bar{A} + \bar{B}$ in $\bar{C}$ enthalten und daher $\bar{\mu}(\bar{A} + \bar{B}) \leq \bar{\mu}(\bar{C}) = \mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \leq \bar{\mu}(\bar{A}) + \bar{\mu}(\bar{B})$. Nach Satz 1a muß hier überall das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt $\bar{A} + \bar{B} \sim \bar{C}$, $A \sim \chi^{-1}(\bar{A})$, $B \sim \chi^{-1}(\bar{B})$. Wir zeigen nun noch, daß $H(\bar{C})$ und damit auch $H(\bar{A} + \bar{B})$ kein Element $x \neq 0$ enthält. Ist nämlich $\bar{C} + \bar{x} \sim \bar{C}$, so folgt $\chi^{-1}(\bar{C}) + x \sim \chi^{-1}(\bar{C})$ und damit $A + B + x \sim A + B$, d.h. $x \in H(A + B) = G'$ oder $\bar{x} = 0$. Damit liegt für $\bar{A}$ und $\bar{B}$ der erste Fall vor, $\bar{G}$ ist also isomorph der Torusgruppe, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind äquivalent zu zwei Intervallen, und wir sind fertig.

Wir wenden uns jetzt dem Satz 3 zu, also der Frage, wann in einer beliebigen lokalkompakten abelschen Gruppe $\mu_*(A+B)=\mu(A)$ sein kann. Wir zeigen zunächst, daß dies sicher dann der Fall ist, wenn B in einer kompakten Untergruppe G' enthalten ist und $A=C \cup D$ mit $\mu(C)=\mu_*(C+B)=0$ und $\mu(D+G')=\mu(D)$ ist. Dann gilt nämlich $\mu(A) \leq \mu_*(A+B) \leq \mu_*(C+B) + \mu(D+G') = \mu(D) = \mu(A)$, d.h. $\mu_*(A+B)=\mu(A)$ wie behauptet. Ist umgekehrt $0 \in B$ und $\mu_*(A+B)=\mu(A) > 0$, so gilt für jedes Element b aus B die Ungleichung $\mu(A \cup (A+b)) \leq \mu_*(A+B) = \mu(A)$, also $A+b \sim A$, d.h. $b \in H(A)$. B und damit auch die von B erzeugte abgeschlossene Untergruppe G' liegen also in der kompakten Gruppe $H(A)$, und daher ist G' kompakt. Nach Hilfssatz 7 gibt es in $\overline{G}=G/G'$ eine integrierbare Menge $\tilde{A}$ und eine Nullmenge $\tilde{B}$ mit der Eigenschaft, daß $\mu'(G' \cap (A-x))$ den Wert $\mu'(G')$ bzw. 0 hat, falls $\bar{x}$ in $\tilde{A}$ bzw. nicht in $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ liegt; ist χ der natürliche Homomorphismus von G auf $\overline{G}$, so haben $\chi^{-1}(\tilde{A})$ und $D=A \cap \chi^{-1}(\tilde{A})$ das gleiche Maß wie A und außerdem $C=A \cap \chi^{-1}(C\tilde{A})$ das Maß null. Es folgt $D+G'=\chi^{-1}(\tilde{A}) \sim D$, also $\mu(D+G')=\mu(D)$ und natürlich auch $\mu(D+B)=\mu(D)=\mu(A)$ und weiter $\mu(A)=\mu_*(A+B)=\mu_*(C+B)+\mu(D+B)=\mu_*(C+B)+\mu(A)$, also $\mu_*(C+B)=0$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes 3 bewiesen.

§ 5. Die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung

Im letzten Abschnitt haben wir uns im wesentlichen auf kompakte Gruppen G beschränkt, und dabei bemerkt, daß für solche die Aussage des Satzes 1 ziemlich scharf ist. Das gilt auch noch, wenn G zwar nicht selbst kompakt ist aber eine offene kompakte Untergruppe enthält. Anders liegen die Verhältnisse, wenn G keine offene kompakte Untergruppe enthält. Eine derartige lokalkompakte abelsche Gruppe kann man als direkte Summe einer Gruppe F und eines reellen Vektorraumes R^n der Dimension $n \geq 1$ darstellen ([13], § 29). Hier kann man nun die Abschätzung des Satzes 1 wesentlich verbessern. Das zeigt schon die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung

$$(7) \quad \mu_*(A+B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}$$

im Falle $G=R^n$ (s. z.B. [2]). Wir wollen daraus folgern, daß die Ungleichung (7) auch für $G=F+R^n$ gilt. Hat eine der Mengen A, B das Maß null, so ist die Ungleichung trivialerweise richtig. Wir können daher $\mu(A)$ und $\mu(B)$ positiv voraussetzen und uns außerdem wie in § 4 auf solche Mengen A und B beschränken, die sich als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen darstellen lassen. Dann sind auch $A+B=C$ und für jedes x aus F die Mengen $A_x=(A-x) \cap R^n$ und die entsprechend gebildeten Mengen B_x und C_x von dieser Art. A_x, B_x und C_x sind daher für das Maß ϱ auf R^n meßbar, und da ersichtlich A_x+B_y in C_{x+y} enthalten ist, folgt nach (7) die Ungleichung

$$(27) \quad \varrho(C_{x+y})^{1/n} \geq \varrho(A_x)^{1/n} + \varrho(B_y)^{1/n}$$

falls nur A_x und B_y nicht leer sind, also sicher dann, wenn beide Summanden rechts positiv sind. Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein. Für posi-

tives t sei $A(t)$ die Menge der Punkte x aus F für die $\varrho(A_x) \geq t^n$ ist; entsprechend $B(t)$ und $C(t)$; die Formel (27) hat dann

$$(28) \quad A(u) + B(v) \subseteq C(u+v)$$

zur Folge. φ sei das HAARSche Maß auf F und $\alpha(t) = \varphi(A(t))$. $\alpha(t)$ und die entsprechend definierten Funktionen $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ sind monoton abnehmend und linksseitig stetig. Aus (28) folgt

$$(29) \quad \gamma(u+v) \geq \max\{\alpha(u), \beta(v)\},$$

falls $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ nicht null sind. Ist $\alpha(t)$ oder $\beta(t)$ für alle positiven Zahlen t von null verschieden, so ist A bzw. B unbeschränkt und daher nach [2], Th. 4 $\mu(A+B) = \infty$. Diesen Fall können wir also ausschließen und bezeichnen dann mit a bzw. b die obere Grenze der t mit $\alpha(t) > 0$ bzw. $\beta(t) > 0$. Um die Formeln zu vereinfachen denken wir uns das Maß ϱ auf R^n so normiert, daß $a+b=1$ wird. Setzt man (29) $u=at$, $v=bt$ mit $0 < t < 1$, so erhält man $\gamma(t) \geq \max\{\alpha(at), \beta(bt)\} \geq a\alpha(at) + b\beta(bt)$. Es folgt

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu(C) &= \int \varrho(C_x) d\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi(C(s^{1/n})) ds \geq \int_0^1 \gamma(t) d(t^n) \\ &\geq a \int_0^1 \alpha(at) d(t^n) + b \int_0^1 \beta(bt) d(t^n) = a^{1-n} \int_0^\infty \varphi(A(s^{1/n})) ds + b^{1-n} \int_0^\infty \varphi(B(s^{1/n})) ds \\ &= a(a^{-1}\mu(A)^{1/n})^n + b(b^{-1}\mu(B)^{1/n})^n \geq (a(a^{-1}\mu(A)^{1/n}) + b(b^{-1}\mu(B)^{1/n}))^n \\ &= (\mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n})^n. \end{aligned} \right.$$

Damit sind die Ungleichung (7) und der Satz 4 bewiesen.

Es bleibt zu untersuchen, wann das Gleichheitszeichen gilt. Wegen Satz 3 können wir uns auf Mengen positiven Maßes beschränken. Sind dann in (30) alle Ausdrücke gleich, so folgt für fast alle t

$$(31) \quad \gamma(t) = \alpha(at) = \beta(bt) \quad \text{für } 0 < t \leq 1,$$

$$(32) \quad \gamma(t) = 0 \quad \text{für } t > 1.$$

Wegen der linksseitigen Stetigkeit der Funktionen α, β, γ gelten diese Gleichungen sogar ausnahmslos. Die Gleichung (31) besagt wegen (28), daß

$$\varphi(A(at) + B(bt)) = \varphi(A(at)) = \varphi(B(bt)) < \varphi(A(at)) + \varphi(B(bt))$$

ist. Nach Satz 1 folgt daraus die Existenz einer offenen kompakten Untergruppe $H = H(t)$ von F mit folgenden Eigenschaften. Nach (2) besteht $A(at) + B(bt)$ aus vollen Restklassen modulo H . Nach (4) ist

$$\varphi(H) \geq \varphi(A(at) + B(bt)).$$

Also ist $A(at) + B(bt)$ eine Restklasse modulo H und $A(at)$ und $B(bt)$ stimmen bis auf φ -Nullmengen mit je einer solchen Restklasse überein. Die Mengen $A(at) + B(bt)$ und damit auch die Untergruppen $H(t)$ nehmen mit wachsendem t monoton ab. Für irgend zwei Werte $0 < u < v < 1$ ist daher der

Quotient $\gamma(u)\gamma(v)^{-1} = \varphi(H(u))\varphi(H(v))^{-1}$ gleich dem Gruppenindex $[H(u):H(v)]$ und somit eine ganze Zahl. Die Funktion $\gamma(t)$ kann daher im Intervall (u, v) nur die endlich vielen Werte $k\gamma(v)$ ($k=1, 2, \dots, [H(u):H(v)]$) annehmen, ist also dort stückweise konstant mit nur endlich vielen Sprungstellen. Wir zeigen jetzt, daß $\gamma(t)$ sogar im ganzen Intervall $(0, 1)$ konstant ist. Wäre nämlich u eine Sprungstelle und $u < v < 1$, so hätten wir nach (31)

$$\gamma(au + bv) < \gamma(u) = \max(\gamma(u), \gamma(v)) = \max(\alpha(au), \beta(bv))$$

im Widerspruch zu (29). Die Untergruppe $H = H(t)$ hängt also gar nicht von t ab. Durch zwei Translationen können wir nun erreichen, daß $A(a)$ und $B(b)$ die Null enthalten. Dann gilt

$$(33) \quad A(at), B(bt) \subseteq H \subseteq A(at) + B(bt) \subseteq C(t) \quad \text{für } 0 < t \leq 1,$$

und alle diese Mengen sind nach (31) φ -äquivalent. Da $A(at)$ und $B(bt)$ für $t > 1$ das Maß null haben, liegen A und B bis auf Nullmengen in $H + R^n$. Lassen wir diese Nullmengen weg, so kann sich die Summe $A + B$ auch nur um eine Nullmenge ändern, da ja in (7) schon das Gleichheitszeichen gilt. Wir betrachten zunächst diese abgeänderten Mengen, setzen also A und B in $H + R^n$ voraus; dann liegt natürlich auch $A + B$ in $H + R^n$. Für die Mengen A_x, B_y und C_x ergibt die Aussage (33) in Verbindung mit (32)

$$(34) \quad \varrho(A_x) = a^n, \quad \varrho(B_y) = b^n, \quad \varrho(C_x) = 1$$

für φ -fast alle x, y, z aus H . Ist nun x ein festes Element aus $A(a)$, also $\varrho(A_x) \geq a^n$, so folgt für φ -fast alle y aus H die Ungleichung

$$(35) \quad 1 = a + b \leq \varrho(A_x)^{1/n} + \varrho(B_y)^{1/n} \leq \varrho(A_x + B_y)^{1/n} \leq \varrho(C_{x+y})^{1/n} = 1.$$

Für jedes x aus $A(a)$ gilt also die erste Gleichung (34) und in der BRUNN-MINKOWSKISCHEN Ungleichung gilt für A_x und B_y das Gleichheitszeichen. A_x und B_y sind daher mit ihren konvexen abgeschlossenen Hüllen ϱ -äquivalent, und diese sind ähnlich und ähnlich gelegen ([2], Th. 2). Dasselbe gilt wegen $0 \in A(a)$ auch für A_0 und B_y . Da A_x und A_0 nach (34) das gleiche Maß haben, stimmen ihre konvexen abgeschlossenen Hüllen bis auf eine Translation um einen Vektor a_x aus R^n überein. Es folgt die ϱ -Äquivalenz $A_x \sim a_x + A_0$ und für φ -fast alle y aus H auch $A_x + B_y \sim a_x + A_0 + B_y$. Wir betrachten jetzt für festes x aus $A(a)$ die Teilmenge

$$x + A_x + B = (x + A_x) + \bigcup_{y \in H} (y + B_y) = \bigcup_{y \in H} (x + y + A_x + B_y)$$

von $A + B$. Ihr Maß ist nach (35)

$$\mu(x + A_x + B) = \int_H \varrho(A_x + B_y) d\varphi(y) = \int_H \varrho(C_{x+y}) d\varphi(y) = \mu(A + B).$$

Also ist $x + A_x + B$ äquivalent zu $A + B$ und speziell, $x=0$ gesetzt, $A_0 + B \sim A + B$. Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} A + B &\sim x + A_x + B = x + \bigcup_{y \in H} (A_x + B_y + y) \sim x + \bigcup_{y \in H} (a_x + A_0 + B_y + y) \\ &= x + a_x + A_0 + B \sim (x + a_x) + (A + B). \end{aligned}$$

$x + a_x$ liegt also in der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H(A + B)$ von $F + R^n$. Daraus folgt $a_x = 0$. Bezeichnen wir mit K bzw. L die konvexe abgeschlossene Hülle von A_0 bzw. B_0 , so sind K und L ähnlich und ähnlich gelegen und es gilt für φ -fast alle x aus H die ϱ -Äquivalenz $A_x \sim K$, also $A \sim H + K$ und entsprechend $B \sim H + L$, und die Äquivalenzen bleiben natürlich erhalten, wenn wir die im Anschluß an die Formel (33) gemachten Abänderungen rückgängig machen. Ganz ähnlich wie zu Beginn von § 4 sieht man auch hier leicht ein, daß A bzw. B keinen Punkt außerhalb $H + K$ bzw. $H + L$ enthalten kann. Macht man schließlich die Translationen von S. 106 rückgängig, so erhält man den Satz 5:

§ 6. Die Dichtesätze der additiven Zahlentheorie

In diesem letzten Abschnitt sollen die am Schluß von § 1 angegebenen Zusammenhänge zwischen HAARSchem Maß und asymptotischer Dichte im einzelnen hergestellt werden. Wie dort sei also G eine kompakte abelsche Gruppe und E eine in G dicht liegende Unter-Halbgruppe. Auf E sei jeder beschränkten Funktion $f(x)$ ein Mittelwert Mf zugeordnet; dieser besitze die Eigenschaft (M) (S. 92) und sei durch $M1 = 1$ normiert, ebenso das HAARSche Maß durch $\mu(G) = 1$. Als erstes beweisen wir den

Hilfssatz 9. *Ist $f(x)$ eine stetige Funktion auf G , so ist $Mf = \int f(x) dx$.*

Der Beweis ist der v. NEUMANNschen Konstruktion des invarianten Integrals auf einer kompakten Gruppe ([9], § 25) und dem Nachweis der Einzigkeit des HAARSchen Maßes ([13], S. 37) nachgebildet. Da $f(x)$ auf der kompakten Menge G stetig ist, gibt es zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U der Null derart, daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $y - x$ in U liegt. Da E in G dicht liegt, gilt $U + E = G$. Endlich viele Mengen $U + a_i$, $a_i \in E$, überdecken also G . $1 = \sum_i h_i(x)$ sei eine zu dieser Überdeckung gehörige Zerlegung der Eins in nicht negative stetige Funktionen $h_i(x)$, die außerhalb $U + a_i$ verschwinden. Mit $c_i = \int h_i(y) dy$ und $d = \int f(y) dy$ folgt

$$d = \int f(x + y) dy = \sum_i \int f(x + y) h_i(y) dy = \sum_i c_i f(x + a_i) + R$$

mit

$$|R| \leq \sum_i \int |f(x + y) - f(x + a_i)| h_i(y) dy \leq \varepsilon \sum_i \int h_i(y) dy = \varepsilon,$$

da $h_i(y)$ nur dann nicht verschwindet, wenn $y - a_i = (x + y) - (x + a_i)$ in U liegt. Es ist also $(d - \varepsilon) \cdot 1 \leq \sum_i c_i f(x + a_i) \leq (d + \varepsilon) \cdot 1$ und daraus folgt nach (M) wegen $\sum_i c_i = 1$ die Ungleichung $d - \varepsilon \leq Mf \leq d + \varepsilon$.

Wie in § 1 sagen wir, ein Teil A von G sei eine J -Menge, wenn A das gleiche Maß hat wie seine abgeschlossene Hülle und sein offener Kern, und bezeichnen als Dichte $\delta(B)$ eines Teiles B von E den Mittelwert $M\varphi_B$ der charakteristischen Funktion φ_B von B . Dann gilt der für das Folgende wichtige

Hilfssatz 10. *Ist A ein offener Teil von G , so gilt $\delta(A \cap E) \geq \mu(A)$; ist A abgeschlossen, so ist $\delta(A \cap E) \leq \mu(A)$; ist A eine J -Menge, so gilt das Gleichheitszeichen.*

Beweis. Ist A offen, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f \leq \varphi_A$ so, daß $\int f(x) dx \geq \mu(A) - \varepsilon$ ist ([I], chap. IV, § 1). Nach Hilfssatz 9 folgt $\delta(A \cap E) = M\varphi_{A \cap E} \geq Mf = \int f(x) dx \geq \mu(A) - \varepsilon$ wie behauptet. Die zweite Ungleichung beweist man entsprechend, und die letzte Behauptung folgt aus den beiden ersten nach Definition der J -Menge.

Hilfssatz 11. Ist e ein Element und L eine Teilmenge von G , so ist $\delta(L \cap (E + e)) = \delta(L \cap E)$.

Beweis. Ist f die charakteristische Funktion von $L \cap E$, g die von $L \cap (E + e)$, so gilt $f(x + e) = g(x + e)$ für alle x aus E . Die Behauptung folgt daher aus (M).

Nun können wir daran gehen, den Satz 6 zu beweisen. A und B seien also J -Mengen aus G , $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ihre abgeschlossenen Hüllen, $\dot{A}$ und $\dot{B}$ ihre offenen Kerne und $C = A \cap E$, $D = B \cap E$. Ohne Einschränkung können wir $A = \dot{A} \cup C$ und $B = \dot{B} \cup D$ annehmen, denn $\dot{A} \cup C$ und $\dot{B} \cup D$ haben auch die von A und B in Satz 6 vorausgesetzten Eigenschaften. Dann ist $\bar{C} = \bar{A}$ und $\bar{D} = \bar{B}$, denn das Komplement von $\bar{C}$ in $\dot{A}$ ist offen und hat nach Hilfssatz 10 höchstens das Maß

$$\mu(\bar{A}) - \mu(\bar{C}) \leq \mu(A) - \delta(\bar{C} \cap E) \leq \mu(A) - \delta(C) = 0,$$

ist also leer. Wir beweisen nun die Ungleichung

$$(36) \quad \delta(C + D) \geq \mu((A + \dot{B}) \cup (\dot{A} + B)).$$

Zu jedem positiven ε gibt es einen kompakten Teil K von $(A + \dot{B}) \cup (\dot{A} + B)$ mit $\mu(K) \geq \mu((A + \dot{B}) \cup (\dot{A} + B)) - \varepsilon$; es genügt offenbar $\delta(C + D) \geq \mu(K)$ zu beweisen. Jeder Punkt von K liegt in einer der offenen Mengen $a + \dot{B}$ bzw. $\dot{A} + b$, und da C in A dicht liegt, kann sogar a in C gewählt werden, ebenso b in D . K ist also in einer endlichen Vereinigung $L = \bigcup_i (c_i + \dot{B}) \cup \bigcup_k (\dot{A} + d_k)$ enthalten. Wir zeigen jetzt, daß $L \cap (E + \sum_i c_i + \sum_k d_k)$ in $C + D$ enthalten ist und haben dann auf Grund der Hilfssätze 11 und 10 die gewünschte Ungleichung $\delta(C + D) \geq \delta(L \cap E) \geq \mu(L) \geq \mu(K)$. Ist nun $l = e + \sum_i c_i + \sum_k d_k$ in L , etwa in $c_j + \dot{B}$, enthalten, so liegt $d = e + \sum_{i \neq j} c_i + \sum_k d_k$ in $\dot{B} \cap E \subseteq D$, also $l = c_j + d$ in $C + D$ wie behauptet. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem ob für die Mengen A und $\dot{B}$ in Satz 1 die Ungleichung (1) gilt oder nicht. Im ersten Falle folgt aus (36) die Ungleichung

$$(8) \quad \delta(C + D) \geq \mu(A + \dot{B}) \geq \mu(A) + \mu(\dot{B}) = \delta(C) + \delta(D)$$

des Satzes 6. Im zweiten Fall besteht $A + \dot{B}$ aus vollen Restklassen einer offenen Untergruppe H . Dabei entnehmen wir dem Beweis von Satz 1, daß $H = H(A + \dot{B})$ die größte Untergruppe von G mit der Eigenschaft $A + \dot{B} + H = A + \dot{B}$ ist und unterscheiden wieder zwei Fälle:

1. In $A + B$ gibt es ein Element $a + b$, das nicht in $A + \overset{\circ}{B}$ liegt. Dann ist

$$\mu(A + H) - \mu(A) \geq \mu(a + H) - \mu(A \cap (a + H)) = \mu(H) - \mu(\overset{\circ}{A} \cap (a + H)),$$

also, da $A + \overset{\circ}{B}$ kein Element der Restklasse $a + b + H$ enthält,

$$\begin{aligned} \mu((A + \overset{\circ}{B}) \cup (\overset{\circ}{A} + B)) &\geq \mu(A + \overset{\circ}{B}) + \mu((\overset{\circ}{A} + b) \cap (a + b + H)) \\ &= \mu(A + H) + \mu(\overset{\circ}{B} + H) - \mu(H) + \mu(\overset{\circ}{A} \cap (a + H)) \geq \mu(A) + \mu(\overset{\circ}{B}) \\ &= \delta(C) + \delta(D), \end{aligned}$$

und daraus folgt nach (36) die Behauptung (8).

2. $A + B = A + \overset{\circ}{B}$. Dann muß auch für A und B in Satz 1 der Ausnahmefall (2), (3) eintreten, und zwar mit derselben Untergruppe $H = H(A + B) = H(A + \overset{\circ}{B})$. Aus (3), angewandt auf die Paare A, B und $A, \overset{\circ}{B}$, folgt dann $\mu(B + H) = \mu(\overset{\circ}{B} + H)$, also $B + H = \overset{\circ}{B} + H$, da sich diese Mengen nur um volle Restklassen von H unterscheiden können. Nun ist das Komplement von $A + \overset{\circ}{B}$ als Vereinigung von Restklassen von H offen, $A + \overset{\circ}{B}$ also kompakt; daher kann im Beweis der Ungleichung (36) $K = L = A + \overset{\circ}{B}$ gewählt werden. Setzen wir $F = H \cap E$ und greifen ein Element h aus

$$H \cap (E + \sum_i c_i + \sum_k d_k)$$

heraus, so erhalten wir

$$(37) \quad C + D + F + h \subseteq (A + B + H) \cap (E + h) \subseteq L \cap (E + \sum_i c_i + \sum_k d_k) \subseteq C + D.$$

Da umgekehrt $C + D + f$ in $C + D + F$ liegt für jedes f aus F , so folgt die Behauptung (9), daß $C + D$ und $C + D + F$ verwandt sind. Schließlich gilt wegen (37), (3) und Hilfssatz 10 die Ungleichung

$$(10) \quad \begin{cases} \delta(C + D) \geq \mu(A + B + H) = \mu(A + H) + \mu(B + H) - \mu(H) \\ \quad \quad \quad \geq \delta(C + F) + \delta(D + F) - \delta(F). \end{cases}$$

Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen. Der Satz 6a ist ein Spezialfall von Satz 6, braucht also nicht mehr bewiesen zu werden.

Es soll jetzt noch ein Beispiel für einen Mittelwert mit der Eigenschaft (M) gegeben werden. Im reellen n -dimensionalen Vektorraum R^n sei K ein konvexer Kegel mit der Spitze im Nullpunkt und E die Menge der in K gelegenen Vektoren mit ganzen Koordinaten. A sei eine im JORDANSCHEN Sinne meßbare Menge, t_k eine unbeschränkt wachsende Folge von positiven reellen Zahlen, a_k eine Folge von Vektoren derart, daß $t_k A + a_k$ in K liegt. Ist $f(x)$ eine beschränkte Funktion auf E , so sei f_k das arithmetische Mittel von $f(x)$ über alle in $t_k A + a_k$ gelegenen Punkte von E . Dann ist leicht einzusehen, daß der Mittelwert $Mf = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ die Eigenschaft (M) besitzt. Hierunter fällt

insbesondere die in der additiven Zahlentheorie gebräuchliche untere asymptotische Dichte⁸⁾. Statt des unteren hätte ebenso gut der obere Limes genommen werden können und beide sind nach Hilfssatz 10 für die in § 1 definierten fastperiodischen Mengen gleich. Für diese existiert also der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$, und zwar ist er unabhängig von der gewählten Menge A und von den t_k und a_k . Das zeigt, daß die fastperiodischen Mengen nur eine sehr enge Klasse von Mengen bilden und der Satz 6a daher im Falle der gewöhnlichen asymptotischen Dichte wesentlich schwächer ist als der in [5] bewiesene Satz.

Zum Schluß sei als Anwendung des Hilfssatzes 10 noch ein Beispiel zweier Mengen A und B von natürlichen Zahlen gegeben, für welche die asymptotischen Dichten vorgeschriebene Werte α und β haben, während ihre Summe $A+B$ die Dichte $\alpha+\beta$ hat (vgl. dazu [8], § 13). ξ sei eine irrationale Zahl. Durch die Abbildung von n auf die Restklasse von $n\xi$ modulo eins erhalten wir eine Einbettung der Halbgruppe E der natürlichen Zahlen in die Gruppe T der reellen Zahlen modulo eins. Sind nun K und L zwei Intervalle aus T mit den Längen α und β , so hat $K+L$ die Länge $\alpha+\beta$. Die Menge A bzw. B der Zahlen n , für die der Rest von $n\xi$ modulo eins in K bzw. L liegt, hat nach Hilfssatz 10 die Dichte α bzw. β und ihre Summe $A+B$ die Dichte $\alpha+\beta$. Sind speziell α und β Vielfache von ξ und $K=I(0, \alpha)$, $L=I(0, \beta)$, so stimmt die asymptotische Dichte mit der finiten (SCHNIRELMANNSCHEN) überein, so daß man hier weitere Beispiele für das Eintreten des Gleichheitszeichens im MANNSCHEN Satz [7] hat (vgl. [8], § 13).

Literatur

- [1] BOURBAKI, N.: *Éléments de Mathématique*. VI: *Intégration* (Actual. Scient. et Ind. 1175). Paris: Hermann 1952. — [2] HENSTOCK, R., and A. M. MACBEATH: On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **3**, 182—194 (1953). — [3] MACBEATH, A. M.: On measure of sum-sets. II. The sum-theorem for the torus. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **49**, 40—43 (1953). — [4] KASCH, F.: Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. Erscheint demnächst im *J. reine angew. Math.* — [5] KNESER, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. *Math. Z.* **58**, 459—484 (1953). — [6] KNESER, M.: Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. *Math. Z.* **61**, 429—434 (1955). — [7] MANN, H. B.: A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. *Ann. of Math.* **43**, 523—527 (1942). — [8] OSTMANN, H. H.: *Additive Zahlentheorie*, 1. Teil, *Allgemeine Untersuchungen* (Ergebnisse d. Math.). Berlin: Springer 1956. — [9] PONTRJAGIN, L.: *Topological groups*. Princeton 1946. — [10] RAIKOV, D.: Über die Addition von Punktmengen im Sinne von Schnirelmann (russisch). *Mat. Sbornik* **5**, 425—440 (1939). — [11] SHIELDS, A.: Sur la mesure d'une somme vectorielle. *Fund. Math.* **42**, 57—60 (1955). — [12] VOSPER, G.: The critical pairs of subsets of a group of prime order. *J. Lond. Math. Soc.* **31**, 200—205 (1956). — [13] WEIL, A.: *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Actual. Scient. et Ind. 869—1145). Paris: Hermann 1951.

⁸⁾ Die in [4] betrachteten Dichtebegriffe sind nicht translationsinvariant und können daher nicht aus einem Mittelwert mit der Eigenschaft (M) gewonnen werden.

Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff *)

Von

JOHANN SCHRÖDER

Das Iterationsverfahren $u_{n+1} = Tu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) zur Lösung einer gegebenen Gleichung $u = Tu$ für Elemente u eines Raumes $\mathfrak{R}$ mit einem (nicht notwendig linearen) Operator T wird für den Fall behandelt, daß in $\mathfrak{R}$ für jedes Elementepaar u, v ein Abstand $\varrho(u, v)$ als Element eines halbgeordneten linearen Raumes $\mathfrak{A}$ erklärt ist. Die vorkommenden Begriffe werden (in § 1) so definiert, wie es für die Anwendungen günstig erscheint¹⁾. Man kommt dann zu formal ähnlichen Ergebnissen (§ 2) wie bei Zahlen als Abstand (vgl. [1], [6]). Statt einer LIPSCHITZ-Konstanten tritt darin jedoch ein Operator P auf. Deshalb sind oft weitere Abschätzungen zweckmäßig (§ 3). Bei derartig verallgemeinertem Abstandsbegriff lassen sich im konkreten Fall die speziellen Eigenschaften der Elemente u und des Operators T stärker erfassen. Eine anschließende Arbeit [5] zeigt an verschiedenen Beispielen, daß man dadurch zu teilweise erheblich engeren Fehlerschranken und schwächeren Konvergenzforderungen gelangt.

§ 1. Bezeichnungen und Hilfssatz

Es sei $\mathfrak{A}$ ein *halbgeordnetes lineares System* von Elementen $\varrho, \sigma, \dots$, d. h. eine Menge, in der $\varrho + \sigma$ und $\alpha \cdot \varrho$ ($\alpha, \beta, \dots$ reelle Zahlen) mit den gewohnten Rechenregeln erklärt und gewisse Elemente ϱ als positiv ($\geq 0 =$ Nullelement von $\mathfrak{A}$) definiert sind, wobei $\varrho \geq 0$, $-\varrho \geq 0$ (gleichzeitig) nur für $\varrho = 0$ gilt und $\varrho + \sigma \geq 0$ aus $\varrho, \sigma \geq 0$, sowie $\alpha\varrho \geq 0$ aus $\alpha \geq 0, \varrho \geq 0$ folgt. $\varrho \geq \sigma$ oder $\sigma \leq \varrho$ bedeutet $\varrho - \sigma \geq 0$.

Wir nennen $\mathfrak{A}$ einen *halbgeordneten linearen Raum*, wenn gewissen (konvergent genannten) Folgen $\varrho_n \in \mathfrak{A}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ein (eindeutig bestimmtes) Grenzelement $\lim \varrho_n \in \mathfrak{A}$ zugeordnet ist und dabei folgende Bedingungen erfüllt sind²⁾:

- $$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) aus } \varrho_n = \varrho \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ mit einem festen Element } \varrho \text{ folgt } \lim \varrho_n = \varrho, \\ \text{b) aus } \lim \varrho_n = \varrho \text{ folgt } \lim \varrho_{k_n} = \varrho \text{ für jede monotone Folge natürlicher} \\ \text{Zahlen } k_n \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{),} \\ \text{c) aus } \lim \varrho_n = \varrho \text{ und } \lim \sigma_n = \sigma \text{ folgt } \lim (\varrho_n + \sigma_n) = \varrho + \sigma, \\ \text{d) aus } \lim \alpha_n = \alpha \text{ und } \lim \varrho_n = \varrho \text{ folgt } \lim \alpha_n \varrho_n = \alpha \varrho, \\ \text{e) aus } 0 \leq \varrho_n \leq \sigma_n \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ und } \lim \sigma_n = 0 \text{ folgt } \lim \varrho_n = 0, \\ \text{f) aus } \varrho_n \geq 0 \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ und } \lim \varrho_n = \varrho \text{ folgt } \varrho \geq 0. \end{array} \right.$$

*) Über diese Arbeit trug der Verf. auf der DMV-Tagung 1955 in Göttingen vor.

¹⁾ KANTOROVITCH [3] benutzte bei der Untersuchung des Iterationsverfahrens als verallgemeinerte Normen in einem linearen Raum $\mathfrak{R}$ Elemente eines halbgeordneten linearen Raumes, definierte diesen Begriff jedoch so, daß der für die Anwendungen wichtige Raum der stetigen Funktionen nicht erfaßt wird. Im übrigen sind die Ergebnisse von KANTOROVITCH von anderer Gestalt.

²⁾ Die Bedingungen (1a, b) verwendete FRÉCHET in [2].

Diese Bedingungen sind im praktischen Fall leicht nachzuprüfen, und es werden damit sehr allgemeine Räume $\mathfrak{N}$ erfaßt.

Beispiele. A. Der Raum $\mathfrak{N} = \mathfrak{C}_m$ der reellen m -dimensionalen Vektoren $\varrho = (\varrho_{(i)})$; $\varrho \geq 0$ bedeutet $\varrho_{(i)} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $\lim \varrho_n = \varrho$ koordinatenweise Konvergenz.

B. Der Raum $\mathfrak{N} = \mathfrak{C}[a, b]$ der im Intervall $[a, b]$ stetigen reellen Funktionen $\varrho(x)$; $\varrho \geq 0$ bedeutet $\varrho(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$), $\lim \varrho_n = \varrho$ gleichmäßige Konvergenz [der Funktionenfolge $\varrho_n(x)$ gegen $\varrho(x)$] im Intervall $[a, b]$.

Im folgenden sei $\mathfrak{N}$ ein halbgeordneter linearer Raum. P bedeute einen Operator, der $\mathfrak{N}$ in sich (eindeutig) abbildet ($P\varrho \in \mathfrak{N}$ für $\varrho \in \mathfrak{N}$). P sei *linear* ($P(\alpha\varrho + \beta\sigma) = \alpha P\varrho + \beta P\sigma$), *stetig* ($\lim P\varrho_n = P\varrho$, wenn $\lim \varrho_n = \varrho$) und *positiv* ($P\varrho \geq 0$, wenn $\varrho \geq 0$).

Beispiele für solche Operatoren P {in Klammern: eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe in (2) bei beliebigem $\varrho \in \mathfrak{N}$ (im Sinne der in $\mathfrak{N}$ gegebenen Definition)}:

A. $\mathfrak{N} = \mathfrak{C}_m$: $P = m \times m$ -Matrix (p_{ik}) , $p_{ik} \geq 0$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) $\{|\lambda| < 1$ für jeden Eigenwert der Matrix P , [4]}.
 B. $\mathfrak{N} = \mathfrak{C}[a, b]$: a) $P\varrho = p(x)\varrho(x)$; $p(x) \geq 0$, stetig ($a \leq x \leq b$) $\{p(x) < 1\}$;

b) $P\varrho = \int_a^x \varrho(\xi) d\xi$ {keine zusätzliche Forderung};

c) $P\varrho = \int_a^b p(x, \xi) \varrho(\xi) d\xi$; $p(x, \xi) \geq 0$, stetig ($a \leq x, \xi \leq b$) $\{P$ besitzt keinen Eigenwert λ ($P\varrho = \lambda\varrho$) mit $|\lambda| \geq 1^3\}$.

Hilfssatz. Konvergiert für jedes Element $\varrho \in \mathfrak{N}$ die NEUMANNsche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho$ (d.h. die Folge $\sum_{i=1}^n P^{i-1}\varrho$), dann existiert der Operator $(E - P)^{-1}$ ($E = \text{Einheitsoperator}$)⁴) und ist in ganz $\mathfrak{N}$ erklärt durch

$$(2) \quad (E - P)^{-1}\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho.$$

Beweis. a) Aus $(E - P)\sigma = 0$ folgt $\sigma = P\sigma = P^2\sigma = \dots = P^n\sigma$. Nach Voraussetzung existiert dann $\lim_{i=1}^n P^{i-1}\sigma = \lim n\sigma$. Mit (1a) und (1d) ergibt sich

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim n\sigma = 0.$$

b) Die Gleichung $(E - P)\sigma = \varrho$ besitzt bei beliebigem ϱ die Lösung

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho = \lim_{i=1}^n \sum_{i=1}^n P^{i-1}\varrho,$$

³) Die Reihe $p(x, \xi) + p_2(x, \xi) + p_3(x, \xi) + \dots$ mit den iterierten Kernen $p_i(x, \xi)$ konvergiert unter dieser Voraussetzung wegen $p_i(x, \xi) \geq 0$ gleichmäßig gegen ihre stetige Grenzfunktion, den zur Integralgleichung 2. Art $\varrho = \sigma + P\varrho$ gehörigen lösenden Kern.

⁴) Der Operator $(E - P)^{-1}$ existiert, wenn aus $(E - P)\sigma = 0$ folgt, daß $\sigma = 0$ ist; in seinem Definitionsbereich $(E - P)\mathfrak{N}$ ist der Operator dann durch $(E - P)^{-1}(E - P)\varrho = \varrho$ erklärt.

denn wegen (1b) gilt auch $\sigma = \lim_{i=1}^{n+1} P^{i-1} \varrho$, und infolge der Stetigkeit von P , (1c) und (1a) hat man daher

$$(E - P) \sigma = \sigma - P \sigma = \lim_{i=1}^{n+1} P^{i-1} \varrho - \lim_{i=1}^n P^n \varrho = \lim \varrho = \varrho.$$

Es ist also $(E - P) \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$.

c) Sei bei gegebenen σ : $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1} (E - P) \sigma$, so folgt mit b) $(E - P) \tau = (E - P) \sigma$, also wegen a) $\sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1} (E - P) \sigma = \tau = \sigma$, mithin (2).

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen $u, v, \dots$ heiße ein *bezuglich $\mathfrak{R}$ metrischer Raum*, falls jedem Paar von Elementen $u, v \in \mathfrak{R}$ ein Element $\varrho(u, v) \in \mathfrak{R}$ als deren Abstand zugeordnet ist, derart, daß gilt:

a) $\varrho(u, v) = o$ genau dann, wenn $u = v$,

b) $\varrho(u, v) \leq \varrho(u, w) + \varrho(v, w)$ für jedes Elementetripel u, v, w .

Es folgt $\varrho(u, v) = \varrho(v, u)$ und $\varrho(u, v) \geq o$. Konvergenz und (eindeutiges) Grenzelement einer Folge u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) werden in $\mathfrak{R}$ dadurch definiert, daß $u = \lim u_n$ mit $\lim \varrho(u, u_n) = o$ äquivalent ist.

Ein solcher Raum $\mathfrak{R}$ werde *vollständig* genannt, falls jede Folge $u_n \in \mathfrak{R}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ein Grenzelement $u \in \mathfrak{R}$ besitzt, für die $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = o$ ist bei beliebiger monotoner Folge natürlicher Zahlen k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Beispiele ($\mathfrak{R}$ vollständig)⁵⁾:

A. $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_1$: a) Der Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_m$ der m -dimensionalen (reellen oder komplexen) Vektoren $u = (u_{(i)})$ mit $\varrho(u, v) = \max_i |u_{(i)} - v_{(i)}|$.

b) Der Raum $\mathfrak{G}[a, b, \tau(x)]$ der im Intervall $[a, b]$ erklärten (reell- oder komplexwertigen) Funktionen $u(x)$ der Gestalt $u(x) = \tau(x) \tilde{u}(x)$ mit beliebiger stetiger Funktion $\tilde{u}(x)$ und einer festen stetigen Funktion $\tau(x) \geq 0$, die (in $[a, b]$) höchstens endlich viele Nullstellen besitzt;

$$(3) \quad \varrho(u, v) = \max_{a \leq x \leq b} |\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{\tau(x)}.$$

B. $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_m$: a) $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_m$ (wie in A, a) mit dem Vektor $\varrho(u, v) = (|u_{(i)} - v_{(i)}|)$.

b) Der Raum $\mathfrak{G}_m[a, b, \tau_1(x), \dots, \tau_m(x)]$ der m -dimensionalen Vektoren $u = (u_{(i)}(x))$, deren Koordinaten $u_{(i)}(x)$ Elemente aus (gleichen oder verschiedenen) Räumen $\mathfrak{G}[a, b, \tau_i(x)]$ sind, mit dem Vektor

$$\varrho(u, v) = \left(\max_{a \leq x \leq b} \frac{|u_{(i)}(x) - v_{(i)}(x)|}{\tau_i(x)} \right).$$

C. $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}[a, b]$: $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}[a, b, \tau(x)]$ (wie in A, b) mit der Funktion $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$.

⁵⁾ Bei diesen Beispielen ist das Kriterium $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = o$ (für jede monotone Folge k_n), welches den in $\mathfrak{R}$ definierten $\lim$ -Begriff benutzt, identisch mit dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium in seiner üblichen Form. — Die für die reellen Räume $\mathfrak{R}$ benutzten Bezeichnungen $\mathfrak{G}_m, \mathfrak{G}[a, b]$ verwenden wir entsprechend auch für die (reellen oder komplexen) Räume $\mathfrak{R}$. Verwechslungen sind kaum zu befürchten.

§ 2. Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzungen

Es sei $\mathfrak{R}$ ein halbgeordneter linearer Raum und $\mathfrak{N}$ ein bezüglich $\mathfrak{R}$ vollständiger metrischer Raum. T bedeute einen (nicht notwendig linearen) Operator, der einer Teilmenge $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R}$, den Definitionsbereich von T , in $\mathfrak{R}$ (eindeutig) abbildet. Die Gleichung $u = Tu$ soll — ausgehend von einem (beliebigen) Element $u_0 \in \mathfrak{D}$ — mit dem Iterationsverfahren

$$(4) \quad u_{n+1} = T u_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gelöst werden. Ein Operator P (der $\mathfrak{R}$ in sich abbildet und linear, stetig und positiv ist) heiße eine *Schranke* des Operators T , wenn für jedes Elementepaar $u, v \in \mathfrak{D}$ gilt:

$$(5) \quad \varrho(Tu, Tv) \leq P \varrho(u, v).$$

Satz. *Besitzt der Operator T eine Schranke P , mit der die NEUMANNsche Reihe in (2) bei beliebigem $\varrho \in \mathfrak{N}$ konvergiert⁶⁾, und enthält $\mathfrak{D}$ alle Elemente $w \in \mathfrak{R}$, für die*

$$(6) \quad \varrho(w, u_1) \leq \sigma$$

gilt mit $\sigma = (E - P)^{-1} P \sigma_0$ und $\sigma_0 = \varrho(u_1, u_0)$ ⁷⁾, so konvergiert die dann durch (4) definierte Folge $u_n \in \mathfrak{D}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) gegen ein Element u , das die einzige Lösung der Gleichung $u = Tu$ aus $\mathfrak{D}$ ist, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$(7) \quad \varrho(u, u_1) \leq \sigma.$$

Beweis. Wegen (6) liegt u_1 in $\mathfrak{D}$, denn es ist $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} P^i \sigma_0 \geq 0$ nach (1 f). Sei w ein Element, für das (6) richtig ist, so gilt

$$\begin{aligned} \varrho(Tw, u_1) &\leq \varrho(Tw, Tu_1) + \varrho(Tu_1, Tu_0) \leq P \varrho(w, u_1) + P \varrho(u_1, u_0) \\ &\leq (P(E - P)^{-1} + E) P \sigma_0 = (E - P)^{-1} P \sigma_0 = \sigma. \end{aligned}$$

Also liegt mit w auch Tw und damit jedes u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) in der durch (6) gegebenen Kugel. — Aus (5) folgt

$$\begin{aligned} \varrho(u_i, u_{i-1}) &= \varrho(Tu_{i-1}, Tu_{i-2}) \\ &\leq P \varrho(u_{i-1}, u_{i-2}) \leq \dots \leq P^{i-1} \varrho(u_1, u_0) = P^{i-1} \sigma_0 \quad (i = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

⁶⁾ WEISSINGER [6] verlangt bei einem Zahlenabstand $\varrho(u, v)$ nur $\varrho(T^i u, T^i v)$. $P_i \varrho(u, v)$ mit konvergenter Reihe $\sum P_i$. — Dadurch gelingt es z.B., den bezüglich der Konvergenz wesentlichen Unterschied zwischen einem VOLTERRAschen und einem FREDHOLMschen Integraloperator zu erfassen. Dieser Unterschied wird hier unmittelbar berücksichtigt, wenn man $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$ benutzt, weil man dann als P einen Integraloperator vom gleichen Typ wie T verwenden kann. — Entsprechendes wie in [6] ließe sich aber auch bei verallgemeinertem Abstandsbegriff durchführen.

⁷⁾ An Stelle dieser Voraussetzung über $\mathfrak{D}$ kann man verlangen, daß T irgendeinen (u_1 enthaltenden) vollständigen Teilraum $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{D}$ in sich abbildet. Im Satz wird die Kugel (6) als $\mathfrak{D}^*$ benutzt.

und daher für jede monotone Folge natürlicher Zahlen k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$0 \leq \varrho(u_{k_n}, u_n) \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} \varrho(u_i, u_{i-1}) \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} P^{i-1} \sigma_0 = \sum_{i=1}^{k_n} P^{i-1} \sigma_0 - \sum_{i=1}^n P^{i-1} \sigma_0$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wegen (1b, c) konvergiert die rechte Seite gegen Null, so daß sich mit (1e) $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = 0$ ergibt. Da $\mathfrak{M}$ vollständig ist, besitzt die Folge u_n ein Grenzelement $u \in \mathfrak{M}$. u liegt sogar in der Kugel (6) und damit in $\mathfrak{D}$, denn es gilt

$$\varrho(u, u_1) \leq \varrho(u, u_n) + \varrho(u_n, u_1) \leq \varrho(u, u_n) + \sigma,$$

d. h.

$$\varrho(u, u_n) + \sigma - \varrho(u, u_1) \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wegen (1f) also $\sigma - \varrho(u, u_1) \geq 0$. — Man schätzt ab:

$$0 \leq \varrho(Tu, u) \leq \varrho(Tu, Tu_n) + \varrho(u, u_{n-1}) \leq P \varrho(u, u_n) + \varrho(u, u_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Da P stetig ist, folgt mit (1e) $\varrho(Tu, u) = 0$, d. h. $u = Tu$. Gäbe es zwei verschiedene Lösungen $u, u^* \in \mathfrak{D}$ so wäre

$$\varrho(u, u^*) = \varrho(Tu, Tu^*) \leq P \varrho(u, u^*) \leq P^2 \varrho(u, u^*) \leq \dots \leq P^n \varrho(u, u^*),$$

also wegen $\lim P^n \varrho = 0$ und (1f) $\varrho(u, u^*) = 0$ im Widerspruch zu $u \neq u^*$ ($\lim P^n \varrho = \lim \sum_{i=1}^{n+1} P^{i-1} \varrho - \lim \sum_{i=1}^n P^{i-1} \varrho = 0$ nach (2b, c)).

§ 3. Zur praktischen Durchführung der Fehlerabschätzung

Bei vielen Anwendungen ist es möglich, den Operator $(E - P)^{-1}P$ in geschlossener Form anzugeben. Dabei ergibt sich eine für beliebiges σ_0 gültige Formel für die Schranke σ . — Gelingt dies nicht (oder ist der Rechenaufwand zu groß), so kann man die Gleichung

$$(8) \quad (E - P)\sigma = P\sigma_0$$

vielfach doch für das vorliegende spezielle Element σ_0 lösen. — Wenn σ_0 dafür zu komplizierte Gestalt hat, ist es zweckmäßig, σ_0 zu einem einfacheren Element zu vergrößern:

$$(9) \quad \sigma_0 \leq \alpha \tau$$

($\tau \geq 0$). Für die Lösung ϱ der Gleichung

$$(10) \quad (E - P)\varrho = \alpha P\tau$$

gilt dann $\sigma \leq \varrho$ [denn der Operator $(E - P)^{-1}P$ ist positiv]. — Kann man sogar ein Element τ angeben, für das neben (9) die Ungleichung

$$(11) \quad P\tau \leq \gamma \tau$$

mit einer Zahl $\gamma < 1$ gilt, so erhält man eine besonders bequeme Abschätzung in Gestalt einer fertigen Formel:

$$(12) \quad \sigma \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} P\tau$$

und daraus weiter mit (11)

$$(13) \quad \sigma \leq \frac{\alpha \gamma}{1 - \gamma} \tau,$$

denn für die Lösung $\varrho (\geq \sigma)$ der Gl. (10) gilt wegen (11)

$$\varrho = \alpha (E - P)^{-1} P \tau = \alpha P \lim_{i=1}^n P^{i-1} \tau \leq \alpha P \lim_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \gamma^{i-j} \right) \tau = \frac{\alpha}{1 - \gamma} P \tau.$$

Die Schranken σ in (8), ϱ in (10), $\frac{\alpha}{1 - \gamma} P \tau$ in (12), $\frac{\gamma \alpha}{1 - \gamma} \tau$ in (13) werden schrittweise schlechter. Die aus (13) folgende grösste Abschätzung ist oft auch mit Zahlen ϱ als Abstand zu erhalten. — Es sei etwa $\Re = \mathfrak{C}[a, b, \tau(x)]$ und $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$. Die bei $\mathfrak{C}$ vorkommende Funktion $\tau(x)$ werde als Gewichtselement τ in (9) und (11) verwendet. (13) ergibt

$$|u(x) - u_1(x)| \leq \frac{\alpha \gamma}{1 - \gamma} \tau(x) \quad \text{mit} \quad \alpha = \max_{a \leq x \leq b} \frac{|u_1(x) - u_0(x)|}{\tau(x)}.$$

Diese Abschätzung ist identisch mit (7) bei dem Abstand (3) und γ statt P in σ ; γ ist bei diesem Abstand wegen (11) statt P Schranke des Operators T .

Gegenüber (13) stellt die ähnlich einfache Abschätzung (12) meistens schon eine merkbare Verbesserung dar. Die Abschätzung (12) ist um so genauer, je weniger sich die rechten und linken Seiten in (9) und (11) unterscheiden. (9) geht in eine Gleichung über, wenn man $\tau = \sigma_0$ verwendet (zweilen möglich, dann $\alpha = 1$); (11) wird eine Gleichung, wenn τ Eigenelement des Operators P zum Eigenwert γ ist.

σ läßt sich manchmal auch dadurch abschätzen, daß man durch systematisches Probieren — etwa mit Hilfe der Relaxationsrechnung — ein Element ϱ ermittelt, für das

$$(E - P) \varrho \geq P \sigma_0$$

gilt. Damit ist dann $\sigma \leq \varrho$.

Literatur

- [1] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., S. 35 ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [2] FRÉCHET, M.: Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Circ. Mat. Palermo **12**, 1—74 (1906). — [3] KANTOROVITCH, L.: The Method of Successive Approximations for Functional Equations. Acta Math. **71**, 63—97 (1939). — [4] SCHMEIDLER, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen, S. 85 ff. Berlin 1949. — [5] SCHRÖDER, J.: Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. **36**, 168—181 (1956). — [6] WEISSINGER, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. **8**, 193—212 (1952).

Hannover, Schneiderberg 5

(Eingegangen am 13. April 1956)

Bemerkung zu einem Desideratum von PERRON

Von

IVAN PAASCHE

§ 1. Bezeichnungen. Das Desideratum

Mit Hilfe der unbestimmten Koeffizienten s_ν der Funktion

$$s(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu t^\nu \quad (t \text{ unbestimmt})$$

sowie der Unbestimmten ε definieren wir Koeffizienten w_ν, R_ν, V_ν wie folgt:

$$(1) \quad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu t^\nu = w(t), \quad \frac{t w'(t)}{w(t)} = s(t) - s(\varepsilon t),$$

$$(2) \quad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu t^\nu = R(t), \quad \frac{t R'(t)}{R(t)} = -s(t),$$

$$(3) \quad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu t^\nu = V(t), \quad \frac{V(\varepsilon t)}{V(t)} = w(t).$$

Nach Multiplikation der drei (rechten) Definitionsgleichungen für die w_ν, R_ν, V_ν mit der jeweiligen Nennerfunktion w, R, V ergibt sich durch Koeffizientenvergleich bei $t^1, t^2, t^3, \dots$, wenn man noch abkürzend

$$(1 - \varepsilon^\nu) s_\nu = \sigma_\nu \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

setzt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & -3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix},$$

also

$$w_\nu = \frac{1}{\nu!} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} s_1 & 1 & & \\ s_2 & s_1 & 2 & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad R_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & \\ s_2 & s_1 & 2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_\nu & s_{\nu-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix};$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^1 \\ w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^2 \\ w_3 & w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ \text{also } V_\nu = \frac{1}{(\varepsilon^1 - 1) \dots (\varepsilon^\nu - 1)} \begin{vmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^1 \\ w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 - \varepsilon^{\nu-1} \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \dots & w_1 \end{vmatrix}; \end{array} \right.$$

$(\nu = 1, 2, 3, \dots).$

Als kleines Desideratum von PERRON werde nun die folgende Aufgabe bezeichnet¹⁾: Die ν -reihigen Determinanten

$$(6) \quad W_\nu = (\varepsilon^1 - 1) \dots (\varepsilon^\nu - 1) V_\nu \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

sind durch geeignete (sc. übliche erlaubte) Umformungen in die ν -reihige Gestalt

$$(7) \quad S_\nu = (\varepsilon^1 - 1) \dots (\varepsilon^\nu - 1) R_\nu \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

überzuführen.

§ 2. Die gesuchte lineare Transformation

Wir setzen abkürzend

$$\frac{1 - \varepsilon^i}{i} s_k = \sigma_{ik} \quad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, 3, \dots \\ i \geq k, \end{array}$$

ziehen in S_ν die Faktoren $(1 - \varepsilon^1)/1, \dots, (1 - \varepsilon^\nu)/\nu$ bzw. in die Zeilen Nr. 1, ..., ν hinein und zeigen in § 2 und § 3, daß die dann gesuchte Transformation

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{11} & 1 \\ A_{22} & A_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^1 \\ w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^2 \\ w_3 & w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1 - \varepsilon^1 \\ \sigma_{22} & \sigma_{21} & 1 - \varepsilon^2 \\ \sigma_{33} & \sigma_{32} & \sigma_{31} & 1 - \varepsilon^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

¹⁾ Vgl. Math. Z. **64**, 108–109 u. 111–112 (1956). Dort wird auch noch eine andere, schwierigere Aufgabe gestellt, von der durch das Folgende nur ein ganz kleiner Teil (der dortige Fall $m = k$) miterledigt ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll. Die Fälle (a. a. O.) $m < k$, $m = k$, $m > k$ können bzw. als kleines, mittleres, großes Desideratum von PERRON bezeichnet werden.

von den folgenden Koeffizienten A_{ik} geleistet wird:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{v-1,1} = (w_1 - \sigma_{v1}) : (\varepsilon^{v-1} - 1) \quad v = 2, 3, 4, \dots \\ A_{v-1,2} = \begin{vmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^{v-1} \\ w_2 - \sigma_{v2} & w_1 - \sigma_{v1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon^{v-2} - 1 \\ \varepsilon^{v-1} - 1 \end{vmatrix} \quad v = 3, 4, 5, \dots \\ A_{v-1,3} = \begin{vmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^{v-2} \\ w_2 & w_1 & 1 - \varepsilon^{v-1} \\ w_3 - \sigma_{v3} & w_2 - \sigma_{v2} & w_1 - \sigma_{v1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon^{v-3} - 1 \\ \varepsilon^{v-2} - 1 \\ \varepsilon^{v-1} - 1 \end{vmatrix} \quad v = 4, 5, 6, \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Da diese A_{ik} genau die Lösungen der in (8) enthaltenen Gleichungssysteme

$$(A_{v-1,v-1} \dots A_{v-1,1} 1) \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^1 & & & \\ w_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 - \varepsilon^{v-1} \\ w_{v-1} & \dots & w_1 & \end{pmatrix} = (\sigma_{v,v-1} \dots \sigma_{v1}) \quad v = 2, 3, 4, \dots$$

sind (sogar für unbestimmte σ_{ik} , w_k , ε), brauchen wir nur noch die restlichen Gleichungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \sigma_{11} \\ (A_{v-1,v-1} \dots A_{v-1,1} 1) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_v \end{pmatrix} = \sigma_{vv} \quad v = 2, 3, 4, \dots \end{array} \right.$$

von (8) zu beweisen, deren erste $w_1 = \sigma_{11}$ wegen $w_1 = \sigma_1 = (1 - \varepsilon^1) s_1 = \sigma_{11}$ klar ist. Mit (10) äquivalent sind die Gln. (14). Denn (14) ergibt sich aus (10) entweder durch beiderseitige Determinantenbildung in der aus den v ersten Zeilen und Spalten von (8) bestehenden Matrizengleichung (17), nacheinander für $v = 1, 2, 3, \dots$, oder aber wie folgt:

Auf Grund von (9) ist die linke Seite der Behauptung (10) die Entwicklung der linken Seite von (11) nach der 1. Spalte:

$$(11) \quad \frac{1}{(\varepsilon^1 - 1) \dots (\varepsilon^{v-1} - 1)} \begin{vmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^1 & & & \\ w_2 & w_1 & & 1 - \varepsilon^2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ w_{v-1} & w_{v-2} & & \dots & w_1 & 1 - \varepsilon^{v-1} \\ w_v & w_{v-1} - \sigma_{v,v-1} & \dots & & w_1 - \sigma_{v1} \end{vmatrix} = \sigma_{vv} \quad v = 2, 3, 4, \dots$$

Entwickeln wir die Determinante in (11) nunmehr nach der letzten Zeile und bringen σ_{vv} nach links, so kommt mit den V_v aus (5)

$$(12) \quad (w_v - \sigma_{vv}) + (w_{v-1} - \sigma_{v,v-1}) V_1 + \dots + (w_1 - \sigma_{v1}) V_{v-1} = 0 \quad v = 2, 3, 4, \dots$$

²⁾ Nach dem Determinanten-Multiplikationstheorem Zeilen mal Spalten folgt auch umgekehrt (10) aus (14), weil nämlich (17) aus (14), (9) folgt.

Hat man bereits $V_1, \dots, V_{v-1} = R_1, \dots, R_{v-1}$ festgestellt [$V_1 = R_1$ ist wegen $V_1 = w_1/(\varepsilon - 1) = \sigma_1/(\varepsilon - 1) = -s_1 = R_1$ klar], so lautet (12) gemäß (4), (5)

$$(13) \quad (\varepsilon^v - 1) V_v - (\varepsilon^v - 1) R_v = 0,$$

d.h. es ist dann auch $V_v = R_v$, also nach (6), (7)

$$(14) \quad W_v = S_v \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Da sich die 5 Gleichungen (10) bis (14) auch rückwärts durchlaufen lassen, folgt auch umgekehrt (10) aus (14).

§ 3. Vervollständigung des Beweises

Beweisen wir daher etwa $V_v = R_v$ ($v = 1, 2, 3, \dots$): Aus (3) folgt durch logarithmische Ableitung nach t

$$(15) \quad \frac{t w'(t)}{w(t)} = \frac{\varepsilon t V'(\varepsilon t)}{V(\varepsilon t)} - \frac{t V'(t)}{V(t)}$$

und gemäß (2) ist

$$(16) \quad s(t) - s(\varepsilon t) = \frac{\varepsilon t R'(\varepsilon t)}{R(\varepsilon t)} - \frac{t R'(t)}{R(t)}.$$

Da nach (1) die linken Seiten von (15) und (16) übereinstimmen, tun es auch die rechten, d.h. es ist

$$R(\varepsilon t) R(t) \begin{vmatrix} \varepsilon t V'(\varepsilon t) & t V'(t) \\ V(\varepsilon t) & V(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon t R'(\varepsilon t) & t R'(t) \\ R(\varepsilon t) & R(t) \end{vmatrix} V(\varepsilon t) V(t).$$

Vergleicht man hierin die Koeffizienten von $t^1, t^2, t^3, \dots$, so folgt, unter Berücksichtigung der bereits als gleich erkannten V_v und R_v mit niedrigerem Index, nacheinander

$$t^1) \quad 1(\varepsilon^1 - 1) V_1 = 1(\varepsilon^1 - 1) R_1$$

$$t^2) \quad 2(\varepsilon^2 - 1) V_2 = 2(\varepsilon^2 - 1) R_2$$

$$t^3) \quad 3(\varepsilon^3 - 1) V_3 = 3(\varepsilon^3 - 1) R_3$$

$$\dots \dots \dots$$

also $V_v = R_v$ ($v = 1, 2, 3, \dots$), qed. Damit ist das kleine Desideratum von PERRON in der mit (8) gleichbedeutenden Gestalt

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ A_{11} & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ A_{v-1, v-1} & \dots & A_{v-1, 1} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 1 - \varepsilon^1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ w_v & & & 1 - \varepsilon^v & \\ & & & & w_1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1 - \varepsilon^1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \sigma_{vv} & & & 1 - \varepsilon^v & \\ & & & & \sigma_{v1} \end{pmatrix} \quad v = 2, 3, 4, \dots \end{array} \right.$$

gelöst. Die inverse Transformation läßt sich ebenso leicht behandeln.

(13b) Stockdorf (Landkr. Starnberg), Kobellstr. 1

(Eingegangen am 3. Mai 1956)

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“ herausgegeben von L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner. Neue Folge.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der Mathematik“ zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Siebentes Heft: Additive Zahlentheorie.

Von Professor Dr. Hans-Heinrich Ostmann, Berlin. 1. Teil: Allgemeine Untersuchungen. VII, 233 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 29.80

Inhaltsübersicht: Der Summenbegriff; allgemeine Eigenschaften. Mengen mit Relativnullen. Basismengen. Zusammenhang mit DIOPHANTISCHEN Gleichungen. FERMAT-INDIZES. Verallgemeinerungen von Σ . Anzahlfunktion, Kompositionen, Partitionen. Die verschiedenen Dichtebegriffe. Anzahlfunktion reduzibler Mengen. Die zweigliedrige obere asymptotische Dichte. Die arithmetischen (finiten) Dichten reduzibler Mengen. Die asymptotischen Dichten reduzibler Mengen. Die Genauigkeit der Abschätzungen. Basen endlicher Ordnung. Minimalbasen. Wesentliche Komponenten. Weitere Zusammenhänge mit den zugeordneten dyadischen Reihenentwicklungen. — Literaturverzeichnis. — Autorenverzeichnis. — Sachregister.

Elftes Heft: Additive Zahlentheorie.

Von Professor Dr. Hans-Heinrich Ostmann, Berlin. 2. Teil: Spezielle Zahlenmengen. VI, 136 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 22.—

Inhaltsübersicht: Einige Dichterelationen. Rationale und pseudorationale Mengen. Multiplamengen, erzeugende Mengen. Durch multiplikative zahlentheoretische Funktionen definierte Mengen. Die Primzahlen und verwandte Mengen. Die Mengen der k -ten Potenzen. Weitere spezielle Ergebnisse. — Literaturverzeichnis. — Autorenverzeichnis. — Sachregister.

Zwölftes Heft: Algebraic Varieties.

Von Mario Baldassarri, Professor am Mathematischen Institut der Universität Padova (Ital.) IX, 195 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 36.—

Inhaltsübersicht: A survey of the foundations. — The resolution of singularities. — Linear systems. — The geometric genus. — The arithmetic genus. — Algebraic and rational equivalence. — The ABELIAN varieties from the algebraic viewpoint, and related questions. — Theory and applications of the canonical systems. — The algebraic varieties as complex-analytic manifolds. — The applications of stack theory to algebraic geometry. — The superficial irregularity and continuous systems. — Bibliography.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

In Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.
Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXXIV. Band: Abelsche Funktionen und Algebraische Geometrie.

Von **Fabio Conforto** †. Aus dem Nachlaß bearbeitet und herausgegeben von Professor Dr. W. Gröbner, Innsbruck, Professor Dr. A. Andreotti, Turin, und Dr. M. Rosati, Rom.

Mit 8 Textabbildungen. XI, 276 Seiten Gr.-8°. 1956.

DM 38.60; Ganzleinen DM 41.80

Inhaltsübersicht: Die intermediären Funktionen und das Existenztheorem für die **ABELSchen Funktionen**. Die Perioden meromorpher Funktionen. **RIEMANNsche** Matrizen. Die intermediären (oder **JACOBischen**) Funktionen. Das Existenztheorem der **ABELSchen Funktionen**. — Die **ABELSchen Mannigfaltigkeiten**. Die **PICARDSche** Mannigfaltigkeit. Algebraische Korrespondenzen zwischen **PICARDSchen** Mannigfaltigkeiten. Anhang über analytische und meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Variablen. — Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis.

LXXXV. Band: Vorlesungen über Himmelsmechanik.

Von Dr. **C. L. Siegel**, o. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

IX, 212 Seiten Gr.-8°. 1956.

DM 29.80; Ganzleinen DM 33.—

Inhaltsübersicht: I. Das Dreikörperproblem. Kovarianz der **LAGRANGESchen** Ableitungen. Kanonische Transformation. Die partielle Differentialgleichung von **HAMILTON** und **JACOBI**. Der Existenzsatz von **CAUCHY**. Das n -Körperproblem. Der Zusammenstoß. Die regularisierende Transformation. Anwendung auf das Dreikörperproblem. Abschätzung des Dreiecksumfanges. Abschätzung der Geschwindigkeit. Der **SUNDMANSche** Satz. — II. Periodische Lösungen. Die Lösungen von **LAGRANGE**. Die Eigenwerte. Ein Existenzsatz. Der Konvergenzbeweis. Anwendung auf die Lösungen von **LAGRANGE**. Das **HILLSche** Problem. Verallgemeinerung des **HILLSchen** Problems. Die Kontinuitätsmethode. Die Fixpunktmethode. Inhaltstreue analytische Transformationen. Der **BIRKHOFFSche** Fixpunktsatz. — III. Das Stabilitätsproblem. Das funktionentheoretische Zentrumproblem. Der Konvergenzbeweis. Das **POINCARÉSche** Zentrumproblem. Der Satz von **LJAPUNOV**. Der Satz von **DIRICHLET**. Die Normalform **HAMILTONScher** Systeme. Inhaltstreue Abbildungen. Der Wiederkehrsatz. — Literatur.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG